原子衝突研究協会誌　2011年第8巻第1号

しょうとつ

Journal of Atomic Collision Research

The Society for
ATOMIC COLLISION
RESEARCH

原子衝突研究協会　2011年1月15日発行
http://www.atomiccollision.jp/

原子衝突研究協会賛助会員(五十音順)

アイオーピー・パブリッシング・リミテッド（**IOP**英国物理学会出版局） http://journals.iop.org/

アステック株式会社 http://www.astechcorp.co.jp/

有限会社イーオーアール http://www.eor.jp/

Electronics Optics Research Ltd.

株式会社オプティマ http://www.optimacorp.co.jp/

クリムゾン インタラクティブ プライベート リミテッド http://www.enago.jp/ http://www.ulatus.jp/ http://www.voxtab.jp/

株式会社サイエンス ラボラトリーズ http://www.scilab.co.jp/

真空光学株式会社 http://www.shinku-kogaku.co.jp/

スペクトラ・フィジックス株式会社 http://www.spectra-physics.jp/

ソーラボジャパン株式会社 http://www.thorlabs.jp/

ツジ電子株式会社

http://www.tsujicon.jp/

株式会社東京インスツルメンツ

http://www.tokyoinst.co.jp/

株式会社東和計測

http://www.touwakeisoku.ecnet.jp/

株式会社トヤマ

http://www.toyama-jp.com/

株式会社ナバテック

http://www.navatec.co.jp/

仁木工芸株式会社

http://www.nikiglass.co.jp/

伯東株式会社

http://www.g5-hakuto.jp/

株式会社パスカル

http://www.pascal-co-ltd.co.jp/

丸菱実業株式会社 http://www.ec-marubishi.co.jp/

丸菱実業株式会社

MARUBISHI CORPORATION

株式会社メディア研究所 http://mediken.jp/

株式会社 メディア研究所 MEDIKEN MEDIKEN INC.

株式会社ラボラトリ・イクイップメント・コーポレーション http://www.labo-eq.co.jp/

Labo:

しょうとつ

第8巻 第1号

目 次

シリーズ

衝突論ノート
V．影散乱：散乱波の干渉でできる散乱波？
― 完全吸収体は不完全吸収体 ―

島村　勲
理化学研究所原子物理研究室
shimamur@ribf.riken.jp

平成 22 年 12 月 17 日 原稿受付

1　本当のところは何か

常識とされる物理的知識をただ盲信せず，その前提条件に常に気を配りたいという本シリーズの意識の一環として, 前回, 前方ポテンシャル散乱の特殊性を論じました[1]．この意識は研究者になっても大切です．いまそれが問題なく適用できる場合かどうか熟考せずに各分野の常識を当然のようにあてはめている実験論文，計算論文，理論論文にときどき出会います.

前稿で一般論の後に論じた二例の一つが半径 a の剛体球による散乱で，高エネルギー E で古典断面積 πa^2 に近づかず，その 2 倍になる事実と，余分な πa^2 が波の回折効果による「影散乱」のために生じることを述べました．現実の物理現象としては $E \to \infty$ で消えてしまう影散乱前方ピーク[2, 3]が, 積分断面積には寄与 πa^2 のまま残ってしまう見かけ上の矛盾の指摘が主目的でした. その際, 多くの教科書に見られる影散乱の説明は分かりにくいと述べました．それを本稿で多少詳しく考察したいとの魂胆でした.

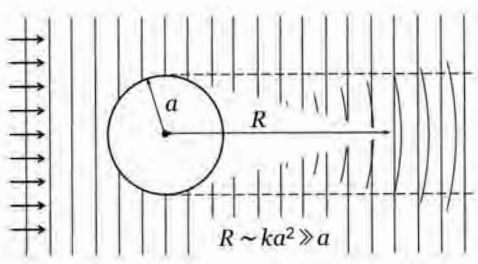

図 1. 影散乱. でも，これって何？ ⇒ 第 5 節.

図 1 のようなイメージで以下のように取れる説明があったら，納得できるでしょうか.

A．標的の影に回り込んだ入射波と散乱波との干渉項が余分な断面積 πa^2 を与える.
B．標的の影に回り込んだ入射波と散乱波との干渉のために余分な断面積 πa^2 が生まれる.

A は変ですね．断面積は散乱波の振幅だけで決まっていて，ほかに何との干渉項も付け加えられません．B の表現は, うーん, 直ちに否定はできません. A と B では全く違います(第 3 節).

古典散乱では影の概念は明瞭です．量子論で影とは何なのでしょう．入射平面波は全空間を一様に満たします．各部分波の正確な動径波動関数は剛体球の後側でも表面まで達しています. 一体どこに影があるのでしょう．影と言うとほんのすぐ後ろと思われるかも知れませんが，実はとてつもなく長い影を議論します (第 5 節).

私は若い方々によく, 物理では数式を最後まで手で追えたから完全に理解したとは言えないと伝えます．それは数学的理解に過ぎない，その物理的意味は何か常に考えたいと. でも, 物理的理解と称する見てきたような，いい加減な説明を鵜呑みにして分かったつもりになるのも気を付けたい. その具体的意味を, 必要なら数式を助けに, しっかり考察したいものです. その意味で, 影散乱の表面的な描像が気がかりでした.

教科書が解説する影散乱には二種類あります. 砂川 [4]や院生（だったはず）・江沢執筆の大学演習量子力学，散乱の章 [5] では，虚数ポテンシャルで表される完全吸収体による影散乱を考察しています．多くの量子論や散乱理論の教科書 [3, 6–8] が実数ポテンシャルの剛体球散乱を扱っていることは前回触れました [1].

2　完全吸収体も必ず散乱波を出す

影散乱の本質は前々回 [9], 前回 [1]と議論した流れの保存則，流束保存則に密接に関わります. 時間非依存ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ の下の正確な波動関数では, 積分形の保存則は, $V(\mathbf{r})$ が実数なら短距離型であろうがクーロン型であろうが，どの場所のどんな形, 大きさの空間（微小空間から巨大空間まで）でも, そこに出入りする流れの総和は必ずゼロだという一般則の形を取ります [9].

球対称ポテンシャルの下では角運動量 l は保存するので，各部分波につき別々にこの流束保存則が成り立ちます．動径波動関数は漸近形

$$\begin{aligned}\phi_l(r) &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \\ &\propto e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{+i(kr-l\pi/2)} \qquad (1)\end{aligned}$$

をもち，大きな半径 r の球面から単位内向き波が入ると振幅 S_l の外向き波が出ていきます．内向き波と外向き波の干渉は無いので，物理的な流束保存の一般則から直ちに $|S_l|^2 = 1$ と分かります. S 行列は実数の位相のずれ δ_l で $S_l = \exp(2i\delta_l)$ と書けるので, これは数式上も確認できます [9].

$V(r)$ が負の虚部を含めば一般に δ_l も複素数で, $|S_l|^2 < 1$ となります [9]．これは散乱場が入射流束を一部吸収したことを意味しますが，本当の粒子消滅以外にも，入射チャネルと違うチャネルへ流束が失われる効果を表せます. これらを一括して「吸収」と呼びましょう. $|S_{\mathrm{abs},l}|^2 + |S_l|^2 = 1$ を満たす吸収S行列 $S_{\mathrm{abs},l}$ を定義すると，吸収チャネルへの流束を含む流束保存則が満たされます．実は, ポテンシャル散乱に限らず，一般の量子系につき流れの保存則は成り立ちます.

吸収断面積の部分波成分 $\sigma_{\mathrm{abs},l}$ は

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{abs},l} &= (\pi/k^2)(2l+1)|S_{\mathrm{abs},l}|^2 \\ &= (\pi/k^2)(2l+1)(1 - |S_l|^2) \qquad (2)\end{aligned}$$

と表せます. 一方, 弾性散乱部分波断面積は [10]

$$\sigma_l = (\pi/k^2)(2l+1)|S_l - 1|^2 \qquad (3)$$

といつも通り書けます．散乱が無ければ内向き波と同じ振幅 $S_l = 1$ の外向き波が出ますから, $S_l - 1$ は散乱による外向き波の振幅の変化を表します．無散乱のとき吸収チャネルには波が無いので，式 (2) の $S_{\mathrm{abs},l}$ からは 1 を引きません.

ぶつかったものはみな吸収され，跳ね返されるものはないという完全吸収体を考えましょう. 入った流束はすべて吸収チャネルへ流れてしまい，弾性散乱チャネルへの外向き流束 $|S_l|^2$ はゼロになります．このとき，式 (2), (3) から

$$\sigma_{\mathrm{abs},l} = \sigma_l = (\pi/k^2)(2l+1) \qquad (4)$$

が導けます. 完全に吸収したつもりが, それと等量, 弾性散乱チャネルへ逃げています．完全吸収体でも必ず散乱波を生むのです．本当の完全吸収体はあり得ないとも言えます．散乱が無ければ出てきたはずの単位外向き波まで吸収したため, 逆に, 寝ていた弾性散乱を「起こして」しまったという, 何とも皮肉な結末です. これは前々回, 流れの保存則を満たすには非弾性散乱は必ず弾性散乱を伴うと述べた, その極端な例です [9].

高エネルギー剛体球散乱の部分波断面積は式 (4) の 2 倍でした [1]．半径 a の完全吸収球による高エネルギー散乱でも，剛体球散乱と同じ考えで，最近接距離が a になる $l = ka$ が散乱・吸収を起こす最高部分波だとして式 (4) を部分波 ka まで足すと，古典断面積と同じ πa^2 だけの吸収と, 等量の弾性散乱が起こり, 高エネルギー全断面積は剛体球散乱と等しく $2\pi a^2$ になることが分かります. 完全吸収球でも剛体球でも, 古典断面積と等量の余分な弾性散乱を生じるのは球の背後で起こる影散乱の仕業だそうです [3–8].

3　「物理的」断面積と干渉：再確認

前回の前方散乱劇場の主役は入射波と散乱波の干渉でした．影散乱でもこの干渉が非常に重要なので，基本概念を復習しておきましょう.

波動関数が入射平面波＋散乱球面波と表せる大きな半径 r の球を考えます．その表面を通る全流束には出入りの等しい平面波流束と弾性散乱波の流束 [10]，両者の干渉による流束，それに吸収をも肩代わりする非弾性散乱流束があり, 全流束の表面積分は保存則により必ずゼロです.

単位流束の入射平面波に対し，どれだけ余分な流束が球の表面から各方向に「現実に」出て行くかに基づき「物理的」微分断面積 $d\sigma^{\mathrm{phs}}/d\omega$ を定義します．それを全立体角に亘り積分した σ^{phs} を物理的積分断面積と呼びます．弾性散乱には散乱波自身の流束も干渉項も厳密には識別

できずに含まれますが，散乱波だけによる断面積 $d\sigma^{\rm sc}/d\omega$，$\sigma^{\rm sc}$ と干渉流束による $d\sigma^{\rm int}/d\omega$，$\sigma^{\rm int}$ とに数式上は別けられます．

しかし，全表面を出入りする流れは打ち消し合うので物理的断面積 $\sigma^{\rm phs}$ は必ずゼロです．いくら大きな有限値 r でもゼロなので，$r\to\infty$ でもクーロン散乱でも必ずゼロです．にも拘わらずいわゆる弾性散乱断面積 $\sigma^{\rm sc}$ が発散するなら，$\sigma^{\rm int}$ が負で発散してこれを打ち消し，現実のいかなる流束も有限にします．その意味で「クーロン散乱も発散しない」のです [1]．一方，干渉項で打ち消される運命にある $\sigma^{\rm sc}$ の発散を「数式上のクーロン断面積の発散」と前回表現しました [1]．

平面波は前方にしか出ないので干渉流束も前方でしか重要でなく，前方散乱を除けば $d\sigma^{\rm sc}/d\omega$ が殆ど「物理的」弾性散乱断面積に等しいので，通常，これを単に弾性散乱微分断面積 $d\sigma_{\rm el}/d\omega$，その積分 $\sigma^{\rm sc}$ を単に弾性散乱積分断面積 $\sigma_{\rm el}$ と呼びます [1, 9]．干渉項 $d\sigma^{\rm int}/d\omega$ と $d\sigma^{\rm sc}/d\omega$ とは，後者が $\theta\to 0$ で有限な限り，前方部分とそれ以外に，「事実上」問題なく別けられます．

通常の断面積と物理的断面積との違いを前稿の図 1 では流束で表しました [1, 11]．物理的断面積は干渉項のため小角で急激に負に落ち込み，滑らかにゼロ度まで延びた通常の断面積 $d\sigma^{\rm sc}/d\omega$ はこれから外れ，非物理的な観測不能量になります．これを前回，「まやかし」のゼロ度断面積と茶化しました [1]（付録 A の補足参照）．クーロン散乱を有限にするのは物理的断面積の小角での鋭い落ち込みで，影散乱ピークにつき同じ現象にシッフも注意を促しています（第 5 節）．

$f(\theta)e^{ikr(1-\cos\theta)}$ に比例する干渉項は θ の変化とともに激しく振動する $\theta>(kr)^{-1/2}$ では重要でないので [1, 9]，実験室での測定には全く影響しません．干渉が重要な角度領域の幅 $(kr)^{-1/2}$ は $r\to\infty$ とともにゼロに近づきます．それでも，流れの保存則のためにはこの無限に狭い角度範囲内での無限に強い干渉を無視できません．

干渉項は負で，第 1 節の影散乱説明候補 A は明らかに誤りです．しかし，この前方への干渉項が入射流束から削り取った流れを散乱流束へ回して全体の流れの保存を満たすのですから [1, 9]，干渉が間接的に散乱流を作るとも言えます．そう考えると説明候補 B が気にかかります．

4 古典的散乱振幅と影散乱振幅

完全吸収体では $S_l=0$ ですから，散乱振幅は

$$f(\theta)=(2ik)^{-1}\sum(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)$$
$$=-(2ik)^{-1}\sum_{l=0}^{ka}(2l+1)P_l(\cos\theta)\equiv f^{\rm shad}(\theta) \quad (5)$$

となります．影散乱振幅なので $f^{\rm shad}$ と書きましたが，実は，いつもの散乱振幅公式に 2 項中の 1 項として，どんな散乱にでも埋め込まれているのです．ただ，S_l に依ってそれが明瞭に見えたり打ち消されたりするのです．

$\theta=0$ で $P_l=1$ なので，$f^{\rm shad}(\theta=0)$ の各部分波成分は式 (4) の $ik/2\pi$ 倍で，これは ${\rm Im}\, f(\theta=0)$ が全断面積 $\sigma_{\rm tot}$ の $k/4\pi$ 倍という光学定理を満たします [9]．$\theta\simeq 0$ では $P_l\simeq 1$ なので各部分波が同位相で足され，小角ピークが生じます．$k\to\infty$ では $f^{\rm shad}\propto\delta(1-\cos\theta)$ となって $\theta\neq 0$ で消え，$\theta=0$ でも干渉項に飲み込まれて消え失せます．

剛体球散乱では位相のずれは $\delta_l=-ka+l\pi/2$ で [1]，散乱振幅から $f^{\rm shad}(\theta)$ を除いた残りは

$$f^{\rm cl}(\theta)=(2ik)^{-1}\sum(2l+1)S_lP_l(\cos\theta)$$
$$=(2ik)^{-1}e^{-2ika}\sum_{l=0}^{ka}(-1)^l(2l+1)P_l(\cos\theta) \quad (6)$$

と書けます．これは $f^{\rm shad}(\theta)$ と違い，交互に逆位相の和になっており，小角で大きくなりません．

影散乱を初めて指摘したマッセイとモーア [12] は，$|f^{\rm cl}(\theta)|^2$ が古典論に似てほぼ等方的に分布し，積分断面積 $\sim\pi a^2$ を与えることを数値計算で示しました．また，不確定性原理により古典論が破綻する小角 $\theta<\theta^{\rm diff}\simeq(ka)^{-1}$ [1] で，波の縁回折効果により $|f^{\rm shad}(\theta)|^2$ が鋭いピークを示し，これも積分すると $\sim\pi a^2$ となりました [7, 8, 12, 13]．前稿の図 2 はこの結果に基づき古典的散乱と影散乱を別けて描いた概念図です [1]．

こうして剛体球散乱の散乱振幅を古典的な $f^{\rm cl}(\theta)$ と回折効果による影散乱振幅 $f^{\rm shad}(\theta)$ に分離でき，また影散乱部分は完全吸収球による弾性散乱の振幅に一致し，散乱波と入射波の干渉など考えずに影散乱現象を説明できます．しかし，教科書 [7] は，この干渉で影部分に空白ができるために $f^{\rm shad}(\theta)$ が生じると述べています．$f^{\rm shad}(\theta)$ をすでに含む散乱波が再び入射波と関わり合い $f^{\rm shad}(\theta)$ を生むなど，明らかな矛盾に見えます．一体，どういうことなのでしょうか．

5　影はどこから：シッフの広島講演

$E\to\infty$ で影散乱断面積は πa^2 になるのに現実の影散乱は消えてしまうと述べました [1–3]．干渉項を無視した形式的断面積は残っても，物理的断面積は干渉のため $\theta<\theta^{\rm int}\simeq(kr)^{-1/2}$ で負で大きく落ち込み，影散乱ピーク幅 $\theta^{\rm diff}\simeq(ka)^{-1}$ が $\theta^{\rm int}$ より狭くなればピークは干渉項に飲み込まれてしまうからです．負の落ち込みが影散乱ピークに勝ることは流れの保存から明らかです．

影散乱が消える条件 $\theta^{\rm diff}<\theta^{\rm int}$ は $r<r_{\rm c}\simeq ka^2$ を意味します．実験室のように観測点 r が有限値なら，E の増加とともにいずれ影散乱は消え失せます．しかし，始めから理論的理想化 $r\to\infty$ を仮定してしまえば消えません．このように，いくつかの変数につき極限を取る数学的理想化は，その順序や変数間の関係により物理的結果を変える場合があるので，安易に極限を取る前に有限値での考察を十分にしておくべきです．

量子力学の教科書 [3] でご存知のシッフが影散乱に関して 1953 年に広島で講演し，それを論文に残しています [14]．これは第 3 節にまとめた物理的断面積と通常の断面積との違いや有限距離 r での干渉効果の考察に密接に繋がる論文です．その中で，物理的積分断面積がゼロであることから，吸収・非弾性散乱がある場合を含み，全断面積 $\sigma_{\rm tot}$ に対する一般的光学定理

$$\sigma_{\rm tot}=(4\pi/k)\,{\rm Im}\,[f_{\rm el}(\theta=0)] \qquad (7)$$

を再導出しています．$f_{\rm el}$ は弾性散乱振幅 [10]，Im は虚部を取るという意味です．

シッフはまた，負の干渉流束が入射流束を削ったのが散乱標的の背後の長い影で（図 1），それが影散乱を引き起こすと言います [13, 14]．この影には縁回折効果で入射波が徐々に回り込み，標的 a を見込む角度 a/r が $\sim\theta^{\rm diff}$ となる $r=R\sim ka^2$ に達すると影は埋め尽くされます [13, 14]．高エネルギーでは ka が大きく，影の長さは $R\gg a$ を満たします．また R は影散乱消失臨界距離 $r_{\rm c}$ にほぼ等しいので，影散乱は影が消える距離 R 以遠で初めて観測されると言えます．$E\to\infty$ では影は無限に長く，影散乱は永遠に見られません．見られないのに影散乱断面積は πa^2 なのです．

影の長さ ka^2 は波動光学でフレネル領域とフラウンホーファ領域の境目を表します．大学演習 [5] の図には影の長さ ka^2 が入っていますが，自明ということか，その説明が（少なくとも定価 650 円で昔求めた版には）見当たりません．

影が途切れる $r=R$ では干渉領域の大きさ $a^{\rm int}=r\theta^{\rm int}$ は $(R/k)^{1/2}\simeq a$ と，ほぼ標的サイズになります．さらに，そのくらい小角での散乱波は入射波と同程度の振幅をもつことが分かります（付録 B）．この二点から，干渉が作る影が古典断面積と同程度の影散乱を引き起こすという解釈が妥当だと言えるとシッフは言います [3, 14]．

影の無い $r>R$ では $\theta^{\rm diff}>\theta^{\rm int}$ ですから，影散乱ピークの中心に干渉効果による穴が掘られます．すでに述べた通り，この干渉穴は r の増加とともにサイズはますます小さく，しかし負でますます深くなります．この穴をシッフは影の名残り（shadow remnant）と呼んでいます．クーロン散乱でも極端な前方の流束をグーンと落ち込ませ，発散を阻止するのがこの干渉穴です．

シッフ [3, 14] は影散乱文献を全く引用していませんが，文献 [13] はすでに影のシッフ的解釈で前節の $f^{\rm cl}(\theta)$, $f^{\rm shad}(\theta)$ の振幅，位相を波動光学に対応させつつ解析しています．量子論の不確定性原理に通じる波動光学での光線概念の不確定性をレーリー卿が指摘していたこと，不確定性原理による古典散乱理論の破綻領域，つまり影散乱領域を仮に $\theta<(ka)^{-1}$ とすると影散乱断面積が $E\to\infty$ で πa^2 になること，$f^{\rm shad}(\theta)$ が円孔によるフラウンホーファ回折に対応し，実際，その振幅から回折パターンのフラウンホーファ公式が導けることなどを指摘しています．

影散乱はなかなか奥深いものです．キーワードは回折と干渉ですが，抽象的な言葉で短い説明を受けてもイメージがつかめません．やはり，多少の式を使った多面的，具体的な解説が必要です．そして，積分断面積 πa^2 の議論だけでなく，古典論が破綻する小角散乱にピーク構造をもつ微分断面積の吟味が欠かせません．私自身，いくつかの教科書，文献を読み，疑問をもち，考え，初めて分かりかけてきたものです．

6　流束保存と干渉：打ち上げ

散乱とは入射ビームの一部があちこちに弾き飛ばされる現象です．入射流束に加えてさらに新たに散乱流束が生まれるわけではありません．

流れの保存則により，散乱が起これば必ずその分，殆どゼロ度方向に出てくる流束は入射量より減ります．これはポテンシャルが短距離型でも長距離型でも，クーロン型でも全く変わりません．流れの保存則は一般則です．量子論では入射波の流れに散乱波の流れが加わる以外に，入射波と散乱波の干渉が働いてゼロ度方向の流れが入射量より減り，保存則が満たされます．

ここ 3 回に亘り，流れの保存則にまつわる話をいくつかしてきました．この保存則を成り立たせている干渉効果がいろいろな場面で重要な役割を果たしました．それにも拘わらず，教科書に書いてあるように，ふつう我々が取り扱う断面積はこの干渉を無視して定義してあります．実用上はそれでもたいていは問題ありません．そのため，極端に小角の散乱では問題が起こりますと言わずに，極端に小角でない限り問題は起きませんと強調する教科書が多く，問題ない印象だけが残り，干渉効果を忘れがちです．

しかし，この効果が大変重要な光学定理を生み出し，非弾性散乱に必ず弾性散乱を伴わせ，完全吸収体に散乱波を出させ，散乱標的の背後に影領域を作り，角分布に影散乱ピークを生み，そのピークやクーロン散乱を含む一般の前方散乱に穴を開けるなど，興味ある働きをするわけです．それでも，干渉を無視して散乱波だけで定義した通常の微分断面積が前方発散しない限り，干渉穴は大勢には影響を殆ど与えません．しかし，これがクーロン散乱のように発散する場合には，それは干渉を正しく考慮した現実の流れが有限なことに反するのですから，干渉がいかに重要かが分かります．

付録 A：まやかし前方断面積 – 補足

ポテンシャル場によるゼロ度散乱断面積の問題点を論じた前回の議論 [1] は入射波と散乱波の干渉に基づくので，多チャネル問題での弾性散乱 [10] でも本質的に同じ問題が起こります（coherent channels）．非弾性散乱や組替衝突では散乱波は原理的に入射波と完全に区別でき，干渉は起こらないので（incoherent channels），理論的にはゼロ度断面積に何ら問題はありません．なお，荷電粒子同士の衝突でも，非弾性衝突なら通常の微分断面積も前方発散いたしません．

付録 B： 影の終端での散乱振幅

サイズ a の短距離型ポテンシャルでは，回折が起こるほどの小角で散乱球面波の振幅 F は殆ど散乱角 θ に依らず，$F \simeq f_{\rm el}(0)/r$ と考えられます．大まかな見積もり（order estimation）として $f_{\rm el}(0)$ をその虚部で置き換え，光学定理 (7) を使うと，$r = R$ で

$$F \simeq \sigma_{\rm tot}/(4\pi R/k) \simeq \sigma_{\rm tot}/(4\pi a^2)$$

となりますが，これはほぼ 1 のオーダーと言ってよいでしょう [14].

[1] 島村勲, しょうとつ, 第 7 巻第 6 号 (2010).

[2] 文献 [3], 19 節では，$E \to \infty$ で消えると断らず，有限の E なら観測できると表現している．

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. (McGraw-Hill, N.Y., 1968) [井上健 訳, 量子力学 上 (吉岡書店, 1970)], 19, 20 節.

[4] 砂川重信, 散乱の量子論 (岩波書店, 1977).

[5] 小谷正雄，梅沢博臣 編, 大学演習 量子力学 (裳華房, 1959), 第 8 章 (江沢洋).

[6] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, 2nd ed. (Pearson Education, Harlow, 2003).

[7] N. F. Mott and H. S. W. Massey, *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford Univ. Press, 1965) [高柳和夫, 市川行和, 島村勲 訳, 衝突の理論 上 I (吉岡書店, 1975)]. 2.6 節に影散乱に関する文献が挙げてある．

[8] M. S. Child, *Molecular Collision Theory* (Academic, N.Y., 1974).

[9] 島村勲, しょうとつ, 第 7 巻第 5 号 (2010).

[10] 以下，用語の簡単化のため，入射チャネルを弾性散乱チャネルと呼んでしまう．

[11] 非弾性散乱は無視した．また，本当の干渉項は激しく振動して図示できないので，実質的な効果だけを概念的に示した．

[12] H. S. W. Massey and C. B. O. Mohr, Proc. R. Soc. Lond. A**141**, 434 (1933).

[13] H. Wergeland, Avh. Norske. Videns.-Adad. Oslo, I. Mat.-Nat. Klasse, 1945, No.9. 入手困難な方は筆者までご連絡を．

[14] L. I. Schiff, Prog. Theor. Phys. **11**, 288 (1954).