

原子衝突学会誌

# しょうとつ

第 14 巻  
第 5 号  
2017 年

解 説      s 波散乱長で支配される普遍的物理法則      堀越宗一



**THE ATOMIC COLLISION  
SOCIETY OF JAPAN**

原子衝突学会賛助会員（五十音順）

アイオーピー・パブリッシング・リミテッド（IOP 英国物理学会出版局）

Institute *of* **Physics**

<http://journals.iop.org/>

アドキャップバキュームテクノロジー株式会社



<http://www.adcap-vacuum.com>

有限会社イーオーアール



**Electronics Optics Research Ltd.**

<http://www.eor.jp/>

イノベーションサイエンス株式会社



<http://www.innovation-science.co.jp/>

株式会社オプティマ

Optima Corp.

<http://www.optimacorp.co.jp/>

クリムゾン インタラクティブ プライベート リミテッド

The logo for enago features a stylized red and black graphic followed by the word "enago" in a lowercase, sans-serif font.

<http://www.enago.jp/>

<http://ulatus.jp/>

<http://www.voxtab.jp/>

株式会社サイエンス ラボラトリーズ



**株式会社 サイエンス ラボラトリーズ**

<http://www.scilab.co.jp/>

真空光学株式会社

**真空光学株式会社** -Vacuum & Optical Instruments-

<http://www.shinku-kogaku.co.jp/>

スペクトラ・フィジックス株式会社

The logo for Spectra-Physics features a stylized blue "S" followed by the text "Spectra-Physics" in a bold, sans-serif font. Below it, the text "A Newport Company" is written in a smaller font.

<http://www.spectra-physics.jp/>

ソーラボジャパン株式会社



<http://www.thorlabs.jp/>

ツジ電子株式会社



<http://www.tsujicon.jp/>

ツジ電子株式会社  
株式会社東京インスツルメンツ



<http://www.tokyoinst.co.jp/>

株式会社ナバテック

真空機器の未来と歩む



<http://www.navatec.co.jp/>

仁木工芸株式会社



<http://www.nikiglass.co.jp/>

伯東株式会社



<http://www.g5-hakuto.jp/>

丸菱実業株式会社

丸菱実業株式会社

MARUBISHI CORPORATION

<http://www.ec-marubishi.co.jp/>

株式会社ラボラトリ・イクイップメント・コーポレーション



<http://www.labo-eq.co.jp/>

原子衝突学会誌

# しょうとつ

第 14 卷 第 5 号



THE ATOMIC COLLISION  
SOCIETY OF JAPAN

## 目 次

---

解説 s 波散乱長で支配される普遍的物理法則	堀越宗一	... 59
原子衝突学会第 42 回年会プログラム	行事委員会委員長	... 79
「しょうとつ」原稿募集	編集委員会事務局	... 80
ユーザー名とパスワード		... 81

---

## s 波散乱長で支配される普遍的物理法則

堀越宗一

東京大学 大学院理学系研究科附属フォトンサイエンス研究機構

hori@psc.t.u-tokyo.ac.jp

平成 29 年 7 月 14 日原稿受付

粒子の波動性が顕著になる量子系では、粒子は量子統計性を持った波として振る舞い、粒子間の相互作用の影響は散乱波の対称性と位相シフトとして現れる。散乱長とは長波長極限で散乱波の位相シフトを与えるパラメータであるが、2 粒子間の束縛エネルギー、量子多体系の相互作用エネルギーや熱力学量を与える重要な物理量でもある。散乱長が可変な冷却原子を用いて量子多体系の物性を系統的に研究する事により、様々な物理系の本質を理解する事ができる。本解説では、s 波散乱長で相互作用しているスピン 1/2 フェルミ粒子系を扱う。初めに散乱長の物理的意味を確認し、s 波散乱長で記述される様々な普遍的物理法則について解説する。最後にこれまでの実験と希薄中性子物質への応用について紹介する。

### 1. 序論

物性研究とは、物質に性質を与える物理法則を徹底的に理解し、将来の科学技術への応用を目指す研究である。物性研究のアプローチとして以下の 3 通りが考えられる。(i) 調べたい物質を一生懸命測定する (物性実験), (ii) 一生懸命理論計算する (物性理論), (iii) 調べたい物質と同じ物性を示す別の物質を測定する。近年の測定手法やスーパーコンピュータの発展に伴い、(i)(ii) のアプローチによる物性研究は目覚ましい発展を遂げている。しかし観測する事が難しい物質や計算コストが問題になる多粒子系に対しては、物性実験と物性理論だけでは不十分な場合がある。その場合 (iii) のアプローチが重要となる。

図 1 に示したように様々な基本粒子で構成される多体系が存在する。それぞれの粒子系は、質量、粒子半径、相互作用ポテンシャル、密度、圧力等が大きく異なる。そのため (iii) のアプローチは通常難しいと思われる。だが低温の世界ではどの粒子も量子統計性を持った相互作用している波として振る舞うようになる。特定の条件

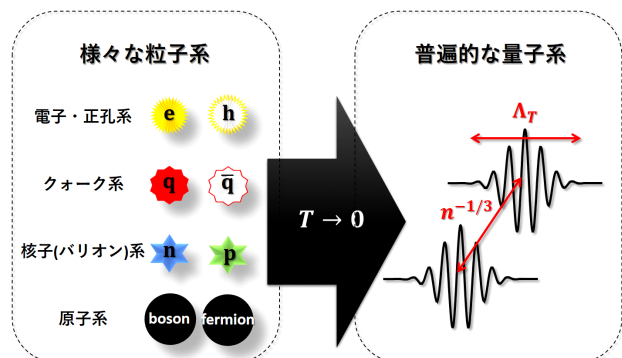


図 1: 様々な粒子系と普遍的な量子系。

の下では粒子の詳細に依らない普遍的な量子系となり、基本的な量子物性に従う量子多体系となる。

一般的に「普遍的」な物理現象とは、有限個のパラメータに複雑な物質系の情報を集約し、そのパラメータで説明できる物理現象を意味する。最も簡単な普遍的な物理現象としてニュートン力学が挙げられる。ボールの自由落下を議論するとき我々はボールを構成しているアボガドロ数の基本粒子の自由度を全て考えるだろうか？我々はボールを質点として捉え、質量  $M$  にボールの内部情報を全て集約して考えるはずで

ある。

2次相転移時にみられる臨界現象も普遍的な物理現象の代表例である。2次相転移は物質の気-液境界線存在する臨界点上での相転移、液体ヘリウムでみられる超流動相転移、電子系の超電導状態への相転移、磁性体の相転移等、様々な物質系に渡って存在する。臨界点はそれぞれの粒子間の複雑な相互作用によって決まるため、その臨界温度  $T_c$  や臨界圧力  $P_c$  は物質に依存し、全く普遍的ではない。言い換えると、これら全ての物質系の相転移温度を共通のパラメータで説明できる一つの方程式は存在しない。しかし臨界点近傍では相関長が発散し、系の詳細が見えなくなることから粒子の詳細に依らない普遍的な物理法則が存在するのはよく知られている。例えば相対温度を  $t \equiv (T - T_c) / T_c$  とすると、 $t = 0$  近傍においては比熱、相関長、秩序パラメータは  $t$  の冪乗則に従うことがよく知られている。この場合、転移温度  $T_c$  という一つのパラメータに物質系の情報を集約している。また臨界現象には複数の臨界指数が存在する。その様な値はその普遍的物理現象を特徴付ける「普遍的な値」と呼ぶ。

普遍的という言葉は「すべてのものに共通しているさま。すべてのものにあてはまるさま。」という意味を持つが、そんな万能な物理法則はない。例えばニュートン力学は運動が光速に近づいたり、運動が不確定性原理に近づく領域では破綻する。また2次相転移の法則を1次相転移に用いることはできない。異なる物質系が共通のパラメータで共通の普遍的な物理に属している場合のみ、それらは共通しているさまを示す。この様な状況を「同じ普遍性に属する」と呼ぶ。

本題に戻すと、粒子間に相互作用が存在しない場合、その基本物性は量子統計のみで決まる。どんな粒子もボソンならばボース統計に従い、フェルミ粒子はフェルミ統計に従うだけであり、粒子が何種類存在してもそれぞれが独立に量子統計に従って振る舞うだけである。しかし粒子間に相互作用が与えられると、量子物性は劇的に

変化する。代表的な例として、電子系に引力相互作用が働くと、2電子はクーパー対を形成し超電導状態へと変化する。また相互作用の対称性により s 波、p 波、d 波超電導状態へと変化する。電子・正孔系やクォーク系は多成分のフェルミ粒子系に相当し、相互作用が様々な物性や状態（プラズマ、束縛、液滴、一次相転移、二次相転移、等々）を与える。この様な量子多体系を理解するため、どのような相互作用がどのような量子物性を発現させるか系統的に研究できるのが望ましい。だが電子間の相互作用を任意に制御するのは難しく、クォーク系や核子系においては観測そのものが容易ではない。

相互作用しているフェルミ粒子系を理解する上で最も基本となるのが、等方的に相互作用する s 波相互作用である。s 波相互作用しているフェルミ多体系の理解は、より複雑な量子系への出発点となる。そこで上記の (iii) の物性研究のアプローチを目的とし、冷却原子を用いた普遍的な量子多体系の物性研究が進展している [1]。つまり粒子間の相互作用の情報を散乱長  $a$  という1つのパラメータ、もしくは散乱長  $a$  と有効長  $r_e$  という2つのパラメータに集約した時、どのような物理法則が誕生するのか理解し、その基本法則を礎により複雑な量子系へ旅立つのが本研究の位置付けである。

特に冷却原子系はフェッシュバハ共鳴を利用して散乱長を実験的に制御できる特徴があり [2]、s 波相互作用しているフェルミ多体系を系統的に研究できる理想的な粒子系となっている。また散乱長が発散している ( $|a| = \infty$ ) ユニタリー極限は、フェルミ粒子が相互作用しているにもかかわらず、散乱長が発散しているため相互作用を与えるパラメータが存在しない相互作用領域となっている。これは理論計算にとって非常に挑戦的であり、現代の量子多体計算の1つの試金石となっている。またユニタリー極限に近い状況は電子系の高温超電導体 [3] や中性子星の中性子物質にも近い [4]、非常に興味深い相互作用領域となっている。

これまで我々は s 波散乱長が発散しているユ

ニタリー極限での熱力学量の測定や [5,6], 弱く引力相互作用しているBCS領域からユニタリー極限までのゼロ温度極限における熱力学量の測定を行った [7,8]. さらに冷却原子研究から中性子物質の物性研究も進めてきている [9]. 本解説ではs波相互作用しているフェルミ粒子系を支配している普遍的物理を説明する.

## 2. 冷却原子気体

冷却原子気体とは, レーザー冷却や蒸発冷却の手法を用いて実現される希薄量子気体である. レーザー冷却はレーザー光の吸収・放出に伴う原子の運動量変化を用いた冷却手法である [10,11]. レーザー冷却が適応可能な粒子の主な条件は, (1) レーザー光の吸収・放出が持続可能な内部状態の存在, (2) 原子を減速できる十分な吸収・放出レートの実現, (3) その内部状態に適合するレーザー光源の存在である. アルカリ原子, アルカリ土類原子, 準安定希ガス原子はこれらの条件を満足するため, 既にレーザー冷却が達成されている. 今日のレーザー光源の発展に伴い, 分子, 反水素原子, ポジトロニウム (電子-陽電子対) のレーザー冷却実現へ向けた研究も進展中である. レーザー冷却は原子気体を室温から1 mK程度まで一気に冷却できる強力な技術であるが, 冷却後も常にレーザー光と相互作用し続けるため冷却温度が制限される. さらに冷却するためには, 光の吸収の無い保存場で原子を捕獲し [12], 蒸発冷却の手法に切り替える必要がある. 蒸発冷却とはエネルギーの大きい粒子を選択的にトラップから取り除き (蒸発させる), その後トラップ内の粒子にエネルギーの再分配を行わせ温度を冷やす手法である. 蒸発冷却後には, 温度1  $\mu$ K以下の極低温原子気体がトラップ中に実現される.

図2(a)にLi原子を用いた我々の実験装置の概略図を示した. 常温で固体のLi原子は真空チャンバー内のオープン中で360°Cに加熱され気化する. 気化したLi原子はオープン直上で二次元的にレーザー冷却され, 冷却された原子の

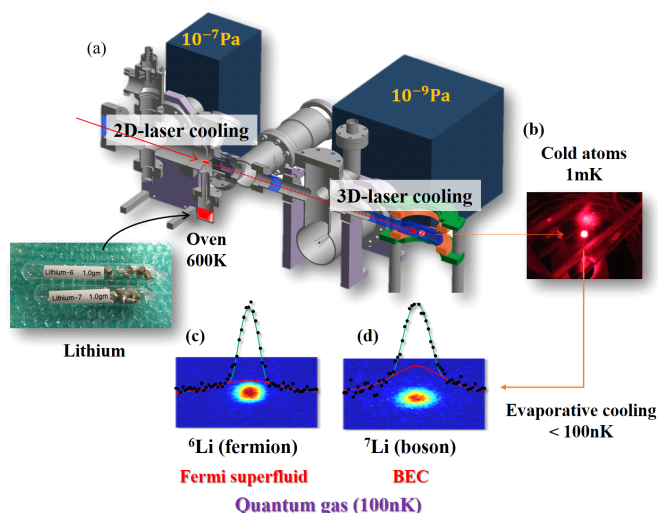


図2: 実験装置. (a) 真空チャンバー, (b) レーザー冷却されてる原子, (c)  ${}^6\text{Li}$  原子対の重心運動量分布, (d)  ${}^7\text{Li}$  原子の運動量分布. (c),(d)の青線が凝縮成分, 赤線が熱的成分.

み高真空側へレーザー光で輸送される. 輸送された原子は三次元的にレーザー冷却され, 30秒で  $10^8$  個程度集められる. 図2(b)にレーザー冷却で集められたLi原子の写真を示した. 冷却用レーザーの周波数を調整する事により,  ${}^6\text{Li}$ 原子と  ${}^7\text{Li}$ 原子を選択的にレーザー冷却できる. 両者を同時にレーザー冷却し, ボース・フェルミ混合状態を実現する事も可能である. 集められた冷却原子は光双極子トラップに移行され, 30秒程度の蒸発冷却の過程を経てさらに冷やされる. 100 nKまで冷やされたLi原子は, フェルミオンである  ${}^6\text{Li}$ 原子はクーパー対を形成しフェルミ超流動状態に相転移し (図2(c)), ボソンである  ${}^7\text{Li}$ 原子はボース凝縮状態に相転移する (図2(d)) [13]. 本解説の対象はフェルミ粒子系であるため  ${}^6\text{Li}$ 原子のみを用いた実験に相当する.

## 3. 冷却原子系で制御するs波散乱長

### 3.1 原子によるスピン1/2フェルミ粒子系の実現

${}^6\text{Li}$ 原子は, 電子, 陽子, 中性子をそれぞれ3つずつ所有する中性原子であり, 合計奇数個のフェルミ粒子から構成される複合フェルミ粒子

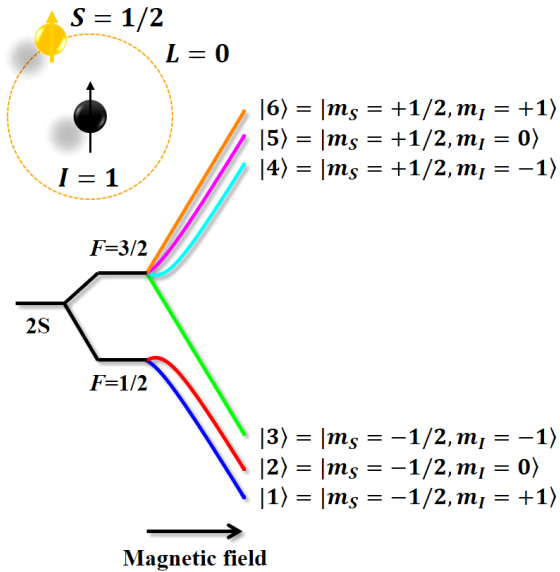


図 3:  ${}^6\text{Li}$  原子の電子基底状態のエネルギーダイアグラム.  $m_s$  と  $m_I$  はそれぞれ量子化軸への電子スピンと核スピンの射影成分.

である. 電子基底状態では  $2s$  軌道に最外殻電子を 1 つ所有するため電子スピン  $S$  は  $1/2$ , 軌道角運動量  $L$  は  $0$ ,  ${}^6\text{Li}$  の原子核の核スピン  $I$  は  $1$  である. よって原子の全角運動量  $F$  は  $F = 1/2$  と  $F = 3/2$  の 2 つの超微細構造を有する. 図 3 に  ${}^6\text{Li}$  の電子基底状態のエネルギーダイアグラムを示した. 磁場中ではそれぞれの超微細構造が磁場に平行な量子化軸に対してゼーマン分裂し, 計 6 つの内部状態に分かれる. 磁場が十分強い領域では, 電子スピンの磁場と同じ方向を向く ( $m_s = +1/2$ ) か逆方向を向く ( $m_s = -1/2$ ) かで, それぞれエネルギーが増える系列と減る系列に分かれ, 各系列の中で核スピンの量子化軸に対しての射影成分 ( $m_I = 0, \pm 1$ ) で 3 つの磁気副準位に分かれる. ここでは便宜上のため, 最低準位から  $|1\rangle, |2\rangle, \dots$  と指標を付けておく. 状態  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  に注目すると, 高磁場中では磁場の変化に対して同じエネルギー変化率を示し, 状態間の遷移はラジオ波領域の磁気双極子遷移のため実験時間 (30 s 程度) に比べて十分長い寿命を持つ. 故にこれらの内部状態は, 外部磁場に対して同じポテンシャルを感じ, 個々のスピン状態は自発的に他の状態へ遷移することなく安定に存在する. これらの内部状態

を用いることにより, 多成分フェルミ粒子系を実現することができる. 本研究では状態  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  が  $1:1$  の混合状態を用意し, 2 成分フェルミ粒子系を実現している. この様な混合系はスピン  $1/2$  フェルミ粒子系と等価であり, 内部状態をスピンと見立てて擬スピンと呼ぶことがある. 後に説明するが状態  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  の散乱過程においても, 散乱後に異なる内部状態に変化する非弾性散乱は生じない.

### 3.2 冷却原子系の長さスケール

ここで我々の冷却原子実験の典型的な長さスケールについて説明する. 原子間の相互作用はファンデルワールス力と与えられ, その有効距離<sup>1</sup> は  ${}^6\text{Li}$  原子の場合  $r_0 = 1.7 \text{ nm}$  である [2]. 熱的ドブロイ長<sup>2</sup> は  $T = 1 \text{ } \mu\text{K}$  の場合,  $\Lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \sim 100 \text{ nm}$  程度であり, 異なる擬スピン間の平均距離は  $n^{-1/3} \sim k_F^{-1} \sim 100 \text{ nm}$  程度である. またトラップポテンシャルの長さスケールは  $L \sim 10 \text{ } \mu\text{m}$  程度である. 以上より粒子系の長さスケールの階層は,

$$r_0 \ll \Lambda_T, k_F^{-1} \ll L \quad (1)$$

を満たす. この条件の下では 2 粒子は距離  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  が有効距離  $r_0$  以下まで近づいたときのみ ( $r < r_0$ ) 相互作用する. 平均粒子間距離から見ると相互作用距離は十分小さいため 2 粒子が接触した時のみ相互作用する様に見える. これを接触型の相互作用 (Contact interaction) と呼ぶ. さらに遠方 ( $r > r_0$ ) では粒子は相互作用ポテンシャルの影響を受けないため自由粒子として振

<sup>1</sup>ファンデルワールス力の有効距離  $r_0$  は長距離での漸近ポテンシャル:  $U(r) = -\frac{C_6}{r^6}$  で定義される. この漸近ポテンシャルによる最も弱く束縛された分子状態の半径  $r_0$  は束縛エネルギーとファンデルワールス力が釣り合う点で決定する. 束縛エネルギーを  $E_b \sim -\frac{\hbar^2}{2m_r r_0^2}$  とすると,  $r_0 = \left(\frac{2m_r C_6}{\hbar^2}\right)^{1/4}$  が得られる. ここで  $m_r$  は換算質量である. この長さスケールはファンデルワールス長としてよく定義される. 参考文献 [2] にあるようにファンデルワールスポテンシャルに近づいてきた原子の波は,  $r < r_0$  の領域で変調を受け  $r > r_0$  の領域で指数的に変調が減衰する. このことから  $r_0$  をファンデルワールス力の有効距離と見なすが妥当なのである.

<sup>2</sup>運動量  $p$  に対する波長  $\lambda_{\text{dB}}$  はドブロイの関係式  $\lambda_{\text{dB}} = h/p = 2\pi/k$  で与えられる. 熱的ドブロイ長は, 粒子の波束分布の期待値を考えるため  $\lambda_{\text{dB}}/2$  の波束の熱的期待値を考えたものである. つまりドブロイ長と熱的ドブロイ長の関係は次式で与えられる:  $\Lambda_T = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{k} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right)}{\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right)}$



る舞う。このようなポテンシャルを近距離型のポテンシャル (Short-range potential) と呼ぶ。

冷却原子は極低温なのに固体にならないのかとしばしば質問を受けることがある。冷却原子の平均距離は、ファンデルワールスポテンシャルサイズに比べ 100 倍程度離れているため、極低温であっても固体に相転移する事はなく、希薄な気体として安定に存在する。粒子として見ると希薄であるが原子の熱的ドブロイ長は粒子の平均距離に達する。そのため冷却原子系は量子統計性を持った波として振る舞う量子系となる。後の説明で基底状態という言葉が出てくるが、それは量子気体としての基底状態であり、 ${}^6\text{Li}$  の真の基底状態は固体状態である。

### 3.3 s 波散乱長

位相シフトと散乱長について簡単に復習する。質量  $m$  が等しい 2 粒子が、中心ポテンシャル  $U(r)$  で相互作用している場合を考える。2 粒子の相対運動は換算質量  $m_r = m/2$  を持った 1 粒子の運動として考えることができ、シュレーディンガー方程式は次式で与えられる。

$$\left[ \frac{1}{2m_r} \left( p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right) + U(r) \right] \Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi). \quad (2)$$

この方程式の一般解は  $\Psi(r, \theta, \phi) = \psi_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  で与えられるため、式 (2) を角度方向と半径方向に変数分離することにより、半径方向のシュレーディンガー方程式が次式で得られる。

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_r} \left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + U(r) \right] \psi_l(r) = E\psi_l(r). \quad (3)$$

ここで  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  は球面調和関数、 $l$  は方位量子数、 $m$  は磁気量子数である。近距離型のポテンシャルの場合、ポテンシャルの有効距離  $r_0$  よりも十分遠方 ( $r \gg r_0$ ) では相互作用ポテンシャルは無視できるので、遠方での波動関数は次式に従わなくてはならない。

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_r} \left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] \psi_l(r) = E\psi_l(r). \quad (4)$$

この方程式の一般解は任意の波数  $k$  に対して、 $\psi_l(k, r) = \frac{c_l}{r} \sin(kr + \eta_l - \frac{1}{2}l\pi)$  の形で与えられる。 $l=0$  の解を s 波散乱波、 $l=1$  の解を p 波散乱波

と呼ぶ。 $c_l$  は各散乱波の規格化定数である。結論として、近距離ポテンシャルによる 2 体の相互作用の影響は、遠方での散乱波の位相シフト  $\eta_l$  として現れる。特に最低次の s 波散乱の場合、散乱波は十分遠方で次式に従う。

$$\psi(r, k) \propto \frac{1}{kr} \sin(kr + \eta_0). \quad (5)$$

ここで  $\eta_0$  は s 波散乱による位相シフトである。

s 波散乱による位相シフトは、散乱長  $a$  と有効長  $r_e$  の二つのパラメータを用いて

$$\cot\eta_0 = -\frac{1}{ak} + \frac{1}{2}r_e k \quad (6)$$

の関係式で近似される。散乱長は長波長極限 ( $k \rightarrow 0$ ) での位相シフトを与えるパラメータであり、有効長は有限運動量に対する補正を与えるパラメータである。両者とも長さの次元を持っているが、前にも記した通り 2 粒子は  $r < r_0$  まで近づいたときのみ相互作用し、これら 2 つの長さは位相シフトを与えるパラメータに過ぎない。厳密には式 (6) の関係式は  $k$  に対して無限次まで展開する必要があるが、エネルギーが高くなると p 波の寄与が大きくなるため無意味な展開となる。十分長波長領域であれば  $a$  と  $r_e$  の二つのパラメータで十分位相シフトを説明できる。

長波長極限では式 (5) で与えられた s 波散乱波は次式の形で近似できる。

$$\psi(k, r) \propto \frac{1}{kr} \sin(k(r-a)). \quad (7)$$

さらに散乱ポテンシャルへの近接 (コンタクト) 波動関数は、散乱ポテンシャルの形状に依らず

$$\psi(r) \propto \frac{1}{r} - \frac{1}{a}. \quad (8)$$

の形で振る舞う。

式 (7) と式 (8) を理解するために、図 4 に散乱長  $a$  で散乱される二つのポテンシャル例を示した。図 4(a) は半径  $a$  の斥力芯ポテンシャル ( $U(r) = +\infty$  for  $r \leq a$ ,  $U(r) = 0$  for  $r > a$ ) の場合を示しており、図 4(b) は適当な半径  $R$  と深さ  $U_0 > 0$  を持った球状井戸型ポテンシャル ( $U(r) = -U_0$  for  $r \leq R$ ,  $U(r) = 0$  for  $r > R$ ) の場合を示している。どちらもポテンシャルの有効

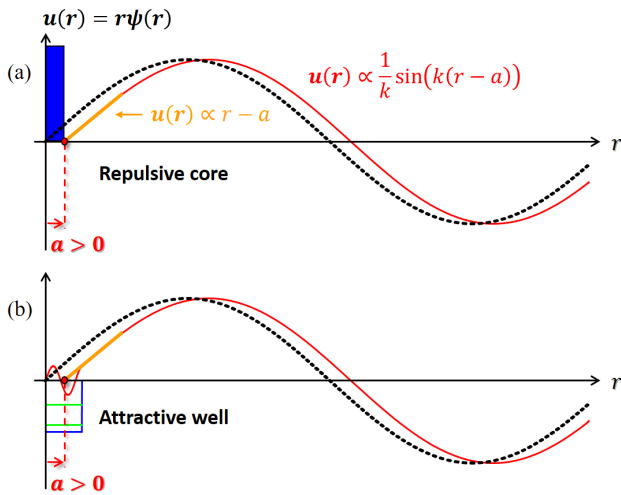


図 4: 位相シフトと散乱長. (a) 斥力芯ポテンシャル, (b) 球状井戸型ポテンシャル. 黒点線は散乱ポテンシャルがない場合の波動関数. 赤実線は散乱ポテンシャルの影響を受けた波動関数. オレンジ実線は散乱ポテンシャルにアプローチする漸近線.

距離の外側では, 式 (7) で示されたように  $ka$  だけ位相シフトした波数  $k$  の波として振る舞い, 有効距離の内側では散乱ポテンシャルの境界条件に従って振る舞う. またどちらの場合も, 散乱ポテンシャルへの進入時に式 (8) で与えられた線形なアプローチを示しており, 散乱長の位置で入射波が散乱されたように振る舞う. 図 4 より, 散乱ポテンシャルが斥力でも引力でも同じ散乱長を示す場合が存在することが理解できる.

続いて球状井戸型ポテンシャルを用いて形状共鳴による散乱長の変化について説明する. 図 5 に井戸の半径  $R$  を固定したまま深さ  $U_0$  だけを変化させた際の散乱波の変化の様子を示した. 図より散乱長は固定の相互作用長であっても, 井戸型ポテンシャルの束縛状態の位置に依存し境界条件が変化し, 散乱波の波動関数が変化を受け, 散乱長が連続的に変化するのが理解できる. この様な散乱ポテンシャルの形状変化に伴う散乱長の変化を, 形状共鳴と呼ぶ. 球状井戸型ポテンシャルの場合, 散乱長  $a$  は  $a(R, U_0) = R \left\{ 1 - \frac{\tan(\sqrt{U_0}R)}{\sqrt{U_0}R} \right\}$  に従い変化する事が知られている.

以上の議論から散乱長についてまとめる. (1) 散乱長は散乱ポテンシャルの束縛状態を含めた

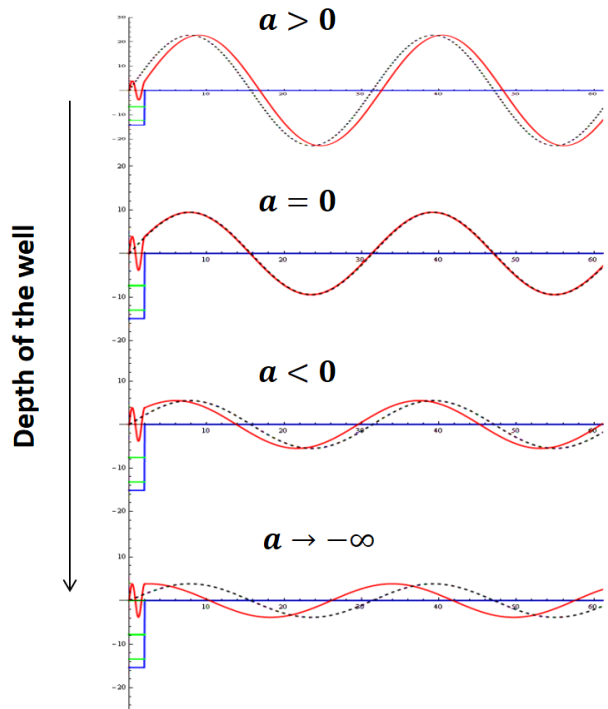


図 5: 形状共鳴による散乱長の変化. 黒の点線は散乱ポテンシャルが存在しない場合の波動関数. 赤の実線が井戸型ポテンシャルと相互作用した波動関数.

境界条件によって決まる散乱波の位相シフト, 及び散乱ポテンシャルにアプローチする波動関数の振る舞いに相当する. (2) 散乱長が無限に発散している場合であっても, 2 粒子は  $r < r_0$  まで近づいたときのみ相互作用する<sup>3</sup>. (3) 散乱長がゼロの場合であっても, 2 粒子は  $r < r_0$  で相互作用しており, 散乱波に影響が出ていないだけである. (4) 散乱長が正の値という情報だけでは, 粒子間の相互作用ポテンシャルが引力か斥力か判断はつかない.

### 3.4 フェッシュバツハ共鳴 [2]

前項で球状井戸型ポテンシャルを用いて散乱長の変化について説明したが, 実際原子間ポテンシャルの形状を任意に変化させることは容易

<sup>3</sup>散乱長が発散していると無限に離れている粒子同士が相互作用できると理解するのは完全に間違っている. この様な誤解は教科書に散乱断面積が  $\sigma_{col} = 4\pi a^2$  と書かれている場合があるため生じる. 散乱振幅は  $f = \frac{1}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}re^{k^2 - ik}}$  であるので, 散乱断面積は  $\sigma_{col} = 4\pi|f|^2 = \frac{4\pi a^2}{1 + a^2 k^2}$  となる. よって  $ak \ll 1$  のときのみ  $\sigma_{col} = 4\pi a^2$  となる.  $ak \gg 1$  の場合は  $\sigma_{col} = \frac{4\pi}{k^2}$  となる.

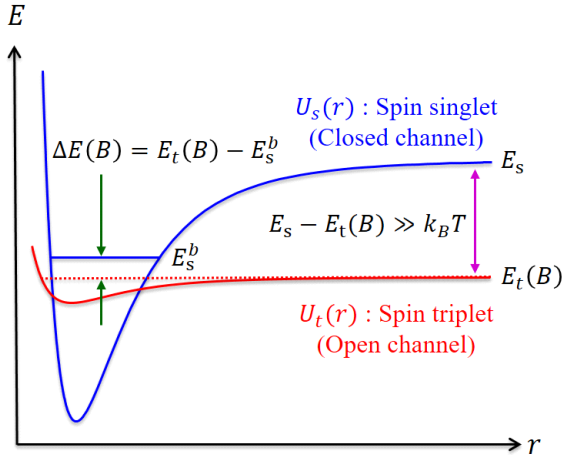


図 6: フェッシュバツハ共鳴の概念図.

ではない。しかし散乱波の位相は束縛状態のレベルに依存するため、もし束縛状態の位置を散乱ポテンシャル内に自由に配置できれば散乱長を制御できる。このアイデアを可能にするのがフェッシュバツハ共鳴であり、1958年に原子核物理学のFeshbachが[14]、1961年に原子物理学のFanoが[15]それぞれ独立に考えた。

ここでは図3に示した ${}^6\text{Li}$ 原子の状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の磁場中での散乱過程を例に、図6を用いてフェッシュバツハ共鳴の原理を簡単に紹介する。 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の散乱過程は、2原子の全電子スピンの散乱ポテンシャル( $U_t(r)$ )で相互作用する。 $U_t(r)$ は2原子分子の非結合性軌道に相当し、また散乱の入射ポテンシャルとしてオープンチャンネルとも呼ばれる。また遠方での $U_t(r)$ のエネルギーレベル( $E_t$ )を入射エネルギーまたは乖離エネルギーと呼ぶ。次に2原子の全電子スピンの散乱ポテンシャル( $U_s(r)$ )を考える。 $U_s(r)$ は2原子分子の結合性軌道に相当し、 $U_t(r)$ よりも深い引力ポテンシャルを持つ。この散乱ポテンシャルをオープンチャンネルに対応してクローズドチャンネルと呼ぶ。 $U_t(r)$ はおよそ $-2\mu_B$ の磁気モーメントを持っているのに対し、 $U_s(r)$ は磁気モーメントを持たない。このため外部磁場により $U_t(r)$ のオフセットの位置のみ変えることができる。

次に図で示したように、 $U_s(r)$ の束縛状態が $E_s^b$ のレベルに存在し、外部磁場により $E_t(B)$ のレベルを $E_s^b$ に対して任意に調整できる場合を考える。この時、 $U_t(r)$ と $U_s(r)$ の間で全角運動量が保存されれば、 $U_t(r)$ で入射してきた波動関数は $U_s(r)$ の束縛状態の影響を2次の摂動的に受け、 $\Delta E(B) = E_t(B) - E_s^b$ の値に依存した位相変化を受ける。このような散乱長の変化をフェッシュバツハ共鳴と呼び、散乱長は以下の式に従って変化する。

$$a(B) = a_{\text{bg}} \left( 1 + \frac{W}{B - B_0} \right). \quad (9)$$

$a_{\text{bg}}, B_0, W$ は $U_t(r)$ と $U_s(r)$ の詳細によって決まるパラメータである。

$U_t(r)$ から入射するフェッシュバツハ共鳴において、 $U_s(r)$ へ散乱される非弾性散乱は起きない。何故ならば、磁場中において遠方では $E_s$ は $E_t(B)$ に対して温度エネルギーよりも十分高いエネルギーを持つため、 $U_s(r)$ で散乱するような過程はエネルギー保存則を満たすことができないからである。故に我々は外部磁場を与えるだけでスピン1/2フェルミ粒子系を安定に維持したまま擬スピン間の散乱長を制御することができるのである。

状態 $|1-2\rangle$ の組み合わせでは $m_S^{1>} + m_I^{1>} + m_S^{2>} + m_I^{2>} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 0 = 0$ である。ここで $|1-2\rangle$ は状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の組み合わせを意味する。 $|1-2\rangle$ が全角運動量を保存する相互作用の行き先として、 $|1-2\rangle \leftrightarrow |1-4\rangle$ と $|1-2\rangle \leftrightarrow |5-2\rangle$ が存在する。実際 $|1-2\rangle$ の組み合わせには2つのフェッシュバツハ共鳴磁場が存在する。これまでの我々の研究[5-9,13,16]では $a_{\text{bg}} = -1582 a_0, B_0 = 832.18 \text{ G}, W = -262.3 \text{ G}$ で与えられるフェッシュバツハ共鳴を用いて散乱長の制御を行っている[17]。ここで $a_0$ はボーア半径である。散乱長の変化の様子は図9の左下のグラフに示した。

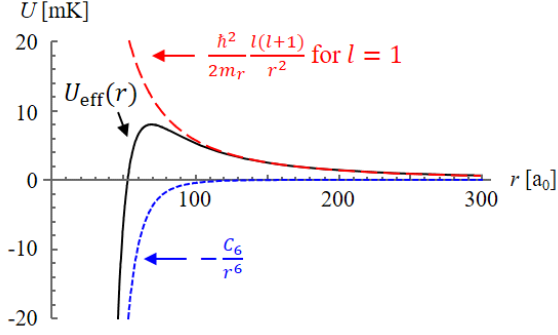


図 7:  ${}^6\text{Li}$  原子の p 波 ( $l = 1$ ) 遠心力ポテンシャルによる実効的な散乱ポテンシャル.

## 4. s 波相互作用している 2 成分フェルミ粒子の普遍的熱力学

### 4.1 ハミルトニアンと擬ポテンシャル

ファンデルワールスポテンシャルの遠方での漸近曲線は、式 (2) より以下の式で近似できる.

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{C_6}{r^6} + \frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (10)$$

図 7 に  ${}^6\text{Li}$  原子の p 波散乱 ( $l = 1$ ) の実効的な散乱ポテンシャルを示した. ここで  $C_6 = 1393.39 E_h a_0^6$  であり,  $E_h$  はハートリーエネルギーである [2].  ${}^6\text{Li}$  原子の場合, 斥力として働く遠心力ポテンシャルによって実効的な散乱ポテンシャルはおよそ 8 mK 程度のポテンシャル障壁を持つ. 十分低温 (熱エネルギーが障壁エネルギーに比べて小さい) で希薄 (フェルミ温度が障壁エネルギーに比べて小さい) なフェルミ粒子系では, この障壁は原子の運動エネルギーよりもはるかに大きな値を持つため極低温での p 波相互作用は抑制される [10]. そのため 1 成分フェルミ粒子系では対称性により同擬スピン間の s 波散乱が許されず粒子間の散乱断面積がゼロになる [18].

だが異なる擬スピン間の s 波散乱は低温でも許容である. 故に十分低温で希薄な 2 成分フェルミ粒子系では, 異なる擬スピン間の s 波散乱のみで 2 体相互作用している多体系となる. 3 体以上の散乱過程はパウリの排他律によって抑制されるため多体の同時相互作用も考える必要

はない (後で説明する BEC 領域では分子同士の散乱はあり得る. この場合相互作用は 4 体問題を考える必要がある).

2 体の相互作用のみを考えればよい場合, 少数系 (2 体, 3 体, ...) や多体系 ( $N$  体) の物性は, それぞれの 1 粒子の運動エネルギーの和と 2 粒子の全ての組み合わせの相互作用エネルギーの和のみを考えればよい. よって擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  のフェルミ粒子の場の演算子を  $\hat{\Psi}_\sigma(\mathbf{r})$  としたとき, 2 成分フェルミ粒子系の大正準多体ハミルトニアンは以下のモデルハミルトニアンを考えればよい [19].

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_\sigma \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\Psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(\mathbf{r}) - \mu \right) d\mathbf{r} + \iint \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (11)$$

ここで  $\mu$  は化学ポテンシャルであり平均粒子数が  $N$  になるように定められる. しかしこのハミルトニアンには物理を理解する上で大きな問題がある. 何故ならばハミルトニアンには相互作用ポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  が陽に含まれており, その粒子専用のハミルトニアンになってしまっているからである. これでは冷却原子で得られた知見を他の粒子系に与えることができない.

これまで議論してきた通り, 相互作用ポテンシャルが近距離型であり, 粒子系が s 波相互作用している粒子系では, 散乱長に 2 粒子間の相互作用の影響が集約されている. 異なる相互作用ポテンシャルであっても, 同じ散乱長を与えるならば 2 粒子間の相互作用の終状態は同じであり, 2 粒子間の相互作用を繰り返して構築される多体系も同じ物性を示さなければならない. また中性子や陽子のように, 核力が厳密に判っていない状況であっても実験的に粒子間の散乱長を決定できる場合がある. すなわち式 (11) のハミルトニアンは散乱長  $a$  で記述されるべきである. そうすることでフェッシュバハ共鳴による散乱長制御で多体系の物理を系統的に研究できるようになる.

そこで擬ポテンシャルの考え方を導入する. 2 粒子間には真の相互作用ポテンシャル  $U_{\text{Real}}(r)$

が存在し、この相互作用ポテンシャルに起因する少数系や多体系の物性を理解したい状況を考える。ここで  $U_{\text{Real}}(\mathbf{r})$  と同じ散乱長  $a$  を与えるように模擬した相互作用ポテンシャル  $U(a, \mathbf{r})$  を人が用意したとする。ここで用意するポテンシャルは散乱長との関係が厳密にわかっているものとする。再度繰り返すが、 $U_{\text{Real}}(r)$  と  $U(r)$  が異なるポテンシャルであっても、同じ散乱長を与えるならば、2粒子間の相互作用の終状態は同じであり、2粒子間の相互作用を繰り返して構築される多体系も同じ物性を示さなければならない。つまり、同じ散乱長を与える適当な相互作用ポテンシャルを人が用意して物理を議論しても構わないという事である。この様に「同じ散乱長を与える模擬した相互作用ポテンシャル」を擬ポテンシャルと呼ぶ。

ここでは擬ポテンシャルとして以下のデルタ型引力ポテンシャルを採用する。

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{\hbar^2}{m} g(a) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) < 0. \quad (12)$$

ここで  $g(a)$  は式 (12) の擬ポテンシャルが任意の散乱長  $a$  を与えるための関数であり、 $[L]$  の次元を持ち常に正の符号を持つ。負の符号は、ファンデルワールスポテンシャルの引力相互作用を再現している。有効長の影響が無視できる極限 ( $kr_e \rightarrow 0$ ) では、 $g(a)$  は以下の式で与えられる<sup>4</sup> [19]。

$$\frac{1}{g(a)} = -\frac{1}{4\pi a} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} > 0 \quad (13)$$

ここで  $V$  は体積である。擬ポテンシャルとして

<sup>4</sup>式 (13) の右辺第二項の  $\mathbf{k}$  で和を取っている物理的意味を補足しておく。散乱理論によると波数  $\mathbf{k}$  から  $\mathbf{k}'$  への散乱振幅  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  は散乱行列  $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  を用いて、 $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  として与えられる。長波長極限 ( $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \rightarrow 0$ ) では  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rightarrow -a$  であるので、 $\frac{4\pi a \hbar^2}{m} = T(0, 0)$  となる。 $T(0, 0)$  の中身は、ゼロ運動量の擬スピン  $\uparrow$  と  $\downarrow$  が相互作用ポテンシャル  $U$  と1回相互作用して元の運動量に戻ってくる確率と、1回目  $U$  と相互作用した時  $+\mathbf{k}$  と  $-\mathbf{k}$  に散乱され2回目  $U$  と相互作用した時元の運動量に戻ってくる確率と、3回目、 $\dots$ 、無限回目に元の運動量に戻ってくる確率を足し合わせたものである。もちろん中間散乱状態の波数  $\mathbf{k}$  も全ての場合を取り入れる。これを数式で表すと  $T(0, 0) = A + AB + AB^2 + \dots$  となり、式 (12) の擬ポテンシャルの場合  $A = -\frac{\hbar^2}{m} g$ 、 $B = \frac{A}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{0-2\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$  となる。 $B < 1$  なので  $\frac{4\pi a \hbar^2}{m} = \frac{A}{1-B}$  となり、まとめると式 (13) が得られる。

井戸型ポテンシャル等を採用してもよいが、ハミルトニアンがシンプルになるのでデルタ型を用いるのが一般的である。

式 (12) で与えられた擬ポテンシャルを式 (11) のハミルトニアンに代入することにより、次式のように散乱長  $a$  をパラメータとして大正準多体ハミルトニアンを記述することができる。

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{\sigma} \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) - \mu \right) d\mathbf{r} - \frac{\hbar^2}{m} g(a) \int \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (14)$$

繰り返し説明するが、粒子のエネルギーが十分長波長領域ならば式 (11) と式 (14) は等価である。擬ポテンシャルを用いたハミルトニアンより、散乱長は単なる2体散乱の位相シフトを与えるパラメータではなく、s波相互作用している量子多体系の粒子間の相互作用を与えるパラメータであることが理解できる。このハミルトニアンはs波相互作用している普遍的な物理現象を理解する出発点となる。

ここでは散乱長  $a$  という1つのパラメータで支配される普遍的物理を探るのが目的である。式 (11) のハミルトニアンでは相互作用ポテンシャルの詳細  $U(\mathbf{r})$  に依存するため、 $U(\mathbf{r})$  を厳密にパラメータ化しようとする無次元化までのテーラー展開で無限個の長さスケールが出現するため普遍的ではない。しかし  $U(\mathbf{r})$  による2体の相互作用の影響を散乱長  $a$  という1つのパラメータ、もしくは散乱長  $a$  と有効長  $r_e$  という有限個のパラメータに集約することにより、式 (14) のハミルトニアンのように有限個のパラメータで粒子系を表現でき、結果として現れる物理現象は普遍的となるのである。

## 4.2 普遍的熱力学ポテンシャル

ここからはより具体的に、式 (14) のハミルトニアンを起源にどのような普遍的物理が生まれるのか説明する。

式 (14) で与えられる多体ハミルトニアンの固有状態を  $|\Psi_n\rangle$ 、その固有値を  $K_n = \langle \Psi_n | \hat{H} - \mu \hat{N} | \Psi_n \rangle$  とする。基底状態の固有値  $K_0$  は  $T = 0$  での熱力学ポテンシャル  $\Omega$  に一致する。有限温度の場合、熱力学ポテンシャルは

大分配関数

$$Z_G = \sum_n e^{-\frac{K_n}{k_B T}}. \quad (15)$$

を用いて次式で与えられる.

$$\Omega(V, T, \mu) = -k_B T \ln Z_G. \quad (16)$$

大正準多体ハミルトニアンが式 (14) のように散乱長  $a$  に依存する場合, 大分配関数は  $\{V, \mu, a\}$  に依存する. よって s 波相互作用しているスピン 1/2 のフェルミ粒子系の熱力学ポテンシャルは,

$$\Omega = \Omega(V, T, \mu, a^{-1}) \quad (17)$$

となり,  $\{T, V, \mu, a^{-1}\}$  の 4 つの熱力学変数で与えられる. 有限個のパラメータで熱力学ポテンシャルが与えられていることから, 全ての熱力学的物性は普遍的となる. さらに式 (17) から散乱長は熱力学変数の 1 つであることが理解できる. もちろん散乱長は示強変数である. 尚ここでは便宜上散乱長の逆数を熱力学変数として選んでいる. 擬ポテンシャルに有効長  $r_e$  も再現する関数を用いることもできる. その場合熱力学ポテンシャルは  $\Omega(T, V, \mu, a^{-1}, r_e)$  となる. 以下では簡単のため散乱長のみを相互作用パラメータとして議論する.

### 4.3 コンタクト密度

次に  $a^{-1}$  と共役な関係を持つ熱力学量について考える. 式 (14) のハミルトニアンは散乱長を変数として持つので, ヘルマン-ファイマンの定理より散乱長の変化に対する固有値  $K_n$  の変化は次式で与えられる.

$$\frac{\partial K_n(a^{-1})}{\partial a^{-1}} = \left\langle \Psi_n \left| \frac{\partial(\hat{H} - \mu\hat{N})}{\partial a^{-1}} \right| \Psi_n \right\rangle. \quad (18)$$

式 (15-18) を用いて, 散乱長の変化に対する熱力学ポテンシャルの変化は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial a^{-1}} \right)_{V, T, \mu} &= \frac{\sum_n \frac{\partial K_n(a^{-1})}{\partial a^{-1}} \exp\left[-\frac{K_n}{k_B T}\right]}{\sum_n \exp\left[-\frac{K_n}{k_B T}\right]} \\ &= \frac{\sum_n \left\langle \Psi_n \left| \frac{\partial(\hat{H} - \mu\hat{N})}{\partial a^{-1}} \right| \Psi_n \right\rangle \exp\left[-\frac{K_n}{k_B T}\right]}{\sum_n \exp\left[-\frac{K_n}{k_B T}\right]} \\ &\equiv \left\langle \frac{\partial(\hat{H} - \mu\hat{N})}{\partial a^{-1}} \right\rangle \quad (19) \end{aligned}$$

式 (14) の右辺第一項は散乱長に依存しないため, 第二項の微分のみを考えればよい. 式 (13)

より  $\frac{dg(a)}{da^{-1}} = \frac{g^2(a)}{4\pi}$  であり, コンタクト密度を次式で定義し,

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}) \equiv \left\langle g^2(a) \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \right\rangle \quad (20)$$

積分コンタクト  $I$  を局所的なコンタクト密度  $\mathcal{C}(\mathbf{r})$  の空間積分で定義する.

$$I = \int \mathcal{C}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (21)$$

結果として式 (19) は以下の形で記述することができる [1, 19–23].

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial a^{-1}} \right)_{V, T, \mu} = -\frac{\hbar^2}{4\pi m} I \quad (22)$$

この右辺が  $a^{-1}$  を熱力学量と見なしたときの共役な熱力学量に相当する. この関係式は断熱関係式と呼ばれ, 散乱長が変化した際の自由エネルギーの変化率を示している. コンタクト密度は  $[L^{-4}]$  の次元を持つ示強性の物理量であり, 積分コンタクトは  $[L^{-1}]$  の次元を持つ示量性の物理量である. コンタクト密度は式 (20) の定義より常に正の値を持つ ( $\mathcal{C} > 0$ ).

コンタクト密度の物理的意味を理解するため, 任意の 2 粒子 ( $i, j$ ) が多体中で式 (8) に従って接触相互作用している状況を考える. 十分希薄な条件の下では, この 2 粒子は他の  $(N-2)$  個の粒子から隔離されていると考えてよい. よって  $N$  体の波動関数は 2 粒子の波動関数とその他の  $(N-2)$  個の波動関数の積として表すことができる. 多体中では s 波散乱が許される全ての組み合わせで接触相互作用が繰り返されているので, 式 (8) の波動関数は常に有限の振幅を持つ. 近距離でのフェルミ対の波動関数が  $1/r$  で振る舞うならば, 異なるスピン間の近距離密度相関は  $1/r^2$  に従わなければならない. 近距離密度相関の厳密な導出は様々な理論的手法で示されており, コンタクト密度を用いて以下の式で与えられる [1, 19–23].

$$\langle \hat{n}_\uparrow(\mathbf{R} + \mathbf{r}_1) \hat{n}_\downarrow(\mathbf{R} + \mathbf{r}_2) \rangle \xrightarrow{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0} \frac{\mathcal{C}(\mathbf{R})}{16\pi^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \quad (23)$$

位置  $\mathbf{R}$  を中心とした半径  $s$  の球の中に存在する相関フェルミ対の数は, この近距離密度相関を

$|\mathbf{r}_1| < s$  と  $|\mathbf{r}_2| < s$  の球内で積分することで得られる。

$$N_{\text{pair}}(\mathbf{R}, s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{s^4}{4} \mathcal{C}(\mathbf{R}) \quad (24)$$

故にコンタクト密度の物理的意味は、半径  $r$  の球内に存在する近距離相関フェルミ対の数の期待値に相当する。

式 (8) による接触相互作用を起源に生まれる実空間での近距離相関を前の段落で議論したが、式 (8) を起源に生まれる運動量空間での普遍法則もコンタクトを用いて記述できる。式 (8) の  $1/r$  の波動関数のフーリエ変換は  $k^2/4\pi$  であり、その期待値である運動量分布は  $1/k^4$  の成分を持つ。この運動量成分の振る舞いは積分コンタクトと関係付けることができ、以下の式に従うことが理論的に証明されている。

$$n_\sigma(k) \xrightarrow{k \gg k_F, \Lambda_T^{-1}} \frac{I}{k^4} \quad (25)$$

故にコンタクトは運動量分布の測定からも決定できる [24]。

#### 4.4 s 波相互作用している粒子の熱力学

式 (22) の断熱関係式を用いることにより、一般的な熱力学ポテンシャルの全微分:  $d\Omega = -PdV - SdT - Nd\mu$  に s 波相互作用の影響を付け加えることができる。

$$d\Omega = -PdV - SdT - Nd\mu - \left( \frac{\hbar^2}{4\pi m} I \right) da^{-1}. \quad (26)$$

ここで  $P, S, N$  は圧力, エントロピー, 全粒子数である。任意の長さスケール変化  $\lambda$  に対して  $\Omega(\lambda V, T, \mu, a^{-1}) = \lambda \Omega(V, T, \mu, a^{-1})$  が成り立つため、

$$\Omega = -PV \quad (27)$$

の関係式は維持されている。一様系を仮定し、 $s = S/V$ ,  $n = N/V$ ,  $\mathcal{C} = I/V$  とすると、圧力の全微分は式 (26) と式 (27) より次式となる。

$$dP = sdT + nd\mu + \left( \frac{\hbar^2}{4\pi m} \mathcal{C} \right) da^{-1}. \quad (28)$$

この全微分の式はギブズ-デュエムの式に相当する。また、単位体積当たりのヘルムホルツの自由エネルギー (自由エネルギー密度) を  $\mathcal{F} = F/V$

とすると、熱力学関係式は  $\Omega = F - \mu N$  より  $\mathcal{F} = \mu n - P$  となる。これより自由エネルギー密度の全微分は以下の形で得られる。

$$d\mathcal{F} = -sdT + \mu dn - \left( \frac{\hbar^2}{4\pi m} \mathcal{C} \right) da^{-1}. \quad (29)$$

以上の結果より s 波相互作用しているフェルミ粒子系の単位体積当たりの熱力学ポテンシャルは、大正準集団 (グランドカノニカルアンサンブル) 描像では

$$P = P(T, \mu, a^{-1}). \quad (30)$$

で与えられ、正準集団 (カノニカルアンサンブル) 描像では

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(T, n, a^{-1}). \quad (31)$$

で与えられることがわかる。

式 (29) と式 (31) を用いて、圧力と内部エネルギー密度 ( $\mathcal{E} = E/V$ ) の関係式を導出する。自由エネルギー密度とその熱力学変数の長さの次元はそれぞれ、 $\mathcal{F}$  は  $[L^{-1}T^{-2}]$ ,  $T$  は  $[L^{-2}]$ ,  $n$  は  $[L^{-3}]$ ,  $a^{-1}$  は  $[L^{-1}]$  である。温度  $T$  の長さの次元がわかりにくいかもしれないが、熱的ドブロイ長が  $\Lambda_T \propto T^{-1/2}$  である事を考えれば理解できる。長さの単位を  $\lambda$  倍、時間の単位を  $\lambda^2$  倍した時、スケール不変性が以下の様に成り立つ。

$$\mathcal{F} \left( \frac{T}{\lambda^2}, \frac{n}{\lambda^3}, \frac{a^{-1}}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda^5} \mathcal{F}(T, n, a^{-1}). \quad (32)$$

両辺を  $\lambda$  で微分し  $\lambda = 1$  とし式 (29) を用いることにより、 $2Ts - 3n\mu + \frac{\hbar^2}{4\pi ma} \mathcal{C} = -5\mathcal{F}$  が得られる。さらに熱力学関係式  $\mathcal{F} = \mathcal{E} - Ts$  と  $P = Ts + \mu n - \mathcal{E}$  を用いることにより、以下の圧力とエネルギー密度の関係式が得られる [1, 19–23]。

$$P = \frac{2}{3} \mathcal{E} + \frac{\hbar^2}{12\pi ma} \mathcal{C}. \quad (33)$$

この関係式は s 波散乱が成り立つ全ての温度で成り立ち、量子状態が常流動か超流動か関係なく成り立つ。ここではコンタクト密度が、理想フェルミ気体の圧力-内部エネルギー密度の関係 ( $P = \frac{2}{3}\mathcal{E}$ ) に s 波相互作用の影響を与えている。

#### 4.5 無次元状態方程式

冷却原子系で圧力  $P$  を  $T, \mu, a^{-1}$  の関数で決定し熱力学ポテンシャルを得たとしても、このま

までは他の粒子系に用いることができない。例えば中性子星の温度は  $10^6$  K であるが、冷却原子系でその様な温度を再現することは当然できない。しかし中性子星の中の中性子も冷却原子も共に s 波散乱で相互作用しているフェルミ粒子ならば、同じ普遍性に属し同じ物理法則に従うはずである。そこで物理量の絶対値から脱却し、フェルミ粒子系を支配する物理量で無次元量を用意し、無次元状態方程式を考える。

大正準集団  $P(T, \mu, a^{-1})$  の場合、 $T, \mu, a^{-1}$  のいずれかを粒子系のエネルギースケールと長さスケールとして考えることができる。温度  $T$  を基準物理量として選んだ時、エネルギースケールは  $k_B T$ 、長さスケールは  $\Lambda_T(T)$  となる。この時無次元圧力は以下の状態方程式  $f_P$  に従う。

$$P \frac{\Lambda_T^3(T)}{k_B T} = f_P \left( \frac{\mu}{k_B T}, \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) \quad (34)$$

ゼロ温度極限 ( $T = 0$ ) では  $T$  を基準物理量として選べない。その場合  $\mu$  を基準物理量として選び、 $k_\mu(\mu) = \frac{\sqrt{2m\mu}}{\hbar}$  の逆数を長さスケールとして考える。この場合無次元圧力は  $\frac{P}{\mu k_\mu^3(\mu)} = f_P \left( \frac{1}{k_\mu(\mu)a} \right)$  となるが、スピン 1/2 の理想フェルミ気体の圧力:  $P_0(\mu) = \frac{2}{15\pi^2} \mu k_\mu^3(\mu)$  を用いて以下の無次元圧力を用意する。

$$\frac{P}{P_0(\mu)} = f_P \left( \frac{1}{k_\mu(\mu)a} \right) \quad (35)$$

正準集団  $\mathcal{F}(T, n, a^{-1})$  の場合、 $T, n, a^{-1}$  のいずれかを粒子系のエネルギースケールと長さスケールとして考えることができる。粒子数密度  $n$  を基準物理量として選ぶと、エネルギースケールは  $\varepsilon_F(n) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$ 、 $k_F(n) = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_F(n)}}{\hbar}$  の逆数を長さスケールとして考える。この時無次元自由エネルギー密度は以下の状態方程式  $f_{\mathcal{F}}$  に従う。

$$\frac{\mathcal{F}}{\frac{3}{5} n \varepsilon_F(n)} = f_{\mathcal{F}} \left( \frac{T}{T_F(n)}, \frac{1}{k_F(n)a} \right) \quad (36)$$

左辺分母が理想フェルミ気体の  $T = 0$  のエネルギー密度になるように 3/5 を与えている。式 (36) は  $T = 0$  でも用いることができる。

特にユニタリー極限のゼロ温度では普遍的な値を持つ。

$$f_{\mathcal{F}}(0, 0) = f_{\mathcal{E}}(0, 0) = \xi \quad (37)$$

1999 年の国際会議で「散乱長が発散しているフェルミ粒子はどう振る舞うの？」と Bertsch が問題提起したので [25]、この定数を Bertsch パラメータと呼ぶことがある。

上記の無次元状態方程式は、全ての無次元熱力学量は熱力学変数の絶対値に依存せず、2つの無次元量によって普遍的に与えられることを意味している。つまり、冷却原子実験で  $f_P$  や  $f_{\mathcal{F}}$  の状態方程式を決定すれば、あらゆる s 波相互作用している粒子系に対して同じ状態方程式が適応できる。よって冷却原子実験および理論研究の目的は、 $f_P$  や  $f_{\mathcal{F}}$  の無次元状態方程式を決定することである。

#### 4.6 2体の束縛状態

次の小節で BCS-BEC クロスオーバーについて触れるが、BCS 領域と BEC 領域の境界を理解するために、ここでは真空中の2つのフェルミ粒子が束縛状態 (分子状態) を持つための条件を議論する。BCS 領域とは2つのフェルミ粒子間の引力相互作用の強さが不十分であるため、真空中でその2粒子が束縛状態をもたず、多体効果 (フェルミ面) によって2粒子の束縛状態 (クーパー対) が実現できる相互作用領域である。一方 BEC 領域とは、2つのフェルミ粒子間の引力相互作用が十分強く、真空中でその2粒子が束縛状態 (分子状態) を持つ相互作用領域である。以下では式 (12) の擬ポテンシャルを用いて、真空中の2つのフェルミ粒子が束縛状態 (分子状態) を持つための条件と、その波動関数について説明する。

分子の波動関数を

$$\psi_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (38)$$

とし、束縛エネルギーを  $E_b = -\frac{\hbar^2}{m\alpha^2}$  として考えると、2体の相対座標でのシュレディンガー方程式は以下の式で与えられる。

$$[\nabla^2 + g(a)\delta(\mathbf{r})] \psi_b(\mathbf{r}) = \frac{1}{\alpha^2} \psi_b(\mathbf{r}) \quad (39)$$

ここで  $\alpha$  は [L] の次元を持つ任意の実数である。



式 (38) を式 (39) に代入することにより係数  $c_{\mathbf{k}}$  が満たすべき方程式が得られる.

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{g(a) \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}}{k^2 + \alpha^{-2}} \quad (40)$$

両辺を  $\mathbf{k}$  で和を取り整理すると次式を得る.

$$\frac{V}{4\pi a} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2(\alpha^2 k^2 + 1)} > 0. \quad (41)$$

この式より, 束縛状態を持つためには  $a > 0$  でなければならないことがわかる. 右辺は  $\frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi k^2}{k^2(\alpha^2 k^2 + 1)} dk = \frac{V}{4\pi\alpha}$  となるため  $\alpha = a$  となる. 故に分子の束縛エネルギーは以下の式で与えられる.

$$E_b(a) = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (42)$$

次に分子の波動関数を導出する. 式 (40) で  $\alpha = a$ ,  $g(a) \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} = A$  とし,  $c_{\mathbf{k}}$  を式 (38) に代入すると, 分子の波動関数は次式で与えられる.

$$\psi_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 + \alpha^{-2}} \quad (43)$$

積分:  $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 + a^{-2}} = \frac{1}{4\pi r} e^{-\frac{r}{a}}$  を用い規格化することにより以下の分子の波動関数が得られる.

$$\psi_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/a}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (44)$$

分子の平均半径は

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty 4\pi r^2 r |\psi_b(r)|^2 dr = \frac{a}{2} \quad (45)$$

であるので, 束縛状態にある 2 粒子は散乱長程度離れていることになる.

#### 4.7 BCS-BEC クロスオーバー

正準集団の見地で粒子系を眺めてみると, 式 (33) より熱力学的物性は, 相互作用パラメータ  $\frac{1}{k_F a}$  と温度パラメータ  $\frac{T}{T_F}$  に依存する. 図 8 に, 横軸を相互作用パラメータ, 縦軸を温度パラメータに選び, s 波相互作用している 2 成分フェルミ多体系の相図の概念図を示した.

式 (12) で説明したように任意の散乱長の値で異なる擬スピン間には引力相互作用が働いているため, いずれの相互作用パラメータにおいてもゼロ温度極限でフェルミ対を生成しボース凝縮状態に至る. その中でも前項で示したように,

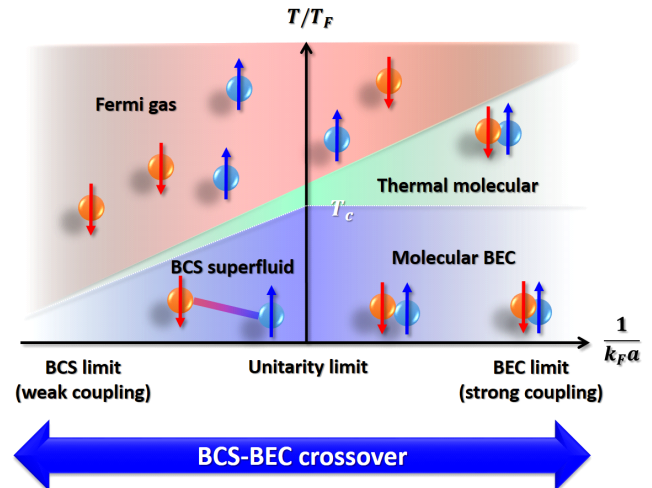


図 8: s 波散乱長で相互作用しているスピン 1/2 フェルミ粒子系の相図.

$a > 0$  の領域では 2 粒子間の引力が十分強く, 真空中で 2 粒子が束縛エネルギー  $E_b = -\frac{\hbar^2}{ma^2}$  で分子状態を維持できる. 粒子の熱的エネルギーが束縛エネルギー以下 ( $k_B T < |E_B|$ ) であれば, 熱的ボース分子として振る舞い, 分子の熱的ドブロイ長が触れ合う温度領域でボース凝縮に至る. 一方,  $a \leq 0$  の領域では 2 粒子間の引力が不十分であり, 多体効果 (フェルミ面) の助けを得ないと 2 粒子は束縛状態は維持できない. フェルミ対が安定に維持される温度領域では同時にボース凝縮の条件も満たすため, 対形成とボース凝縮がほぼ同じ温度領域で生じる. 以上のことから,  $1/k_F a > 0$  の領域を分子ボース領域,  $1/k_F a < 0$  の領域を BCS 超流動領域と呼ぶ. また, 両者の中間領域  $1/k_F a = 0$  をユニタリー極限と呼ぶ. また 2 粒子間の引力相互作用の観点から,  $1/k_F a \rightarrow -\infty$  を弱結合極限,  $1/k_F a \rightarrow +\infty$  を強結合極限と呼ぶ. フェルミ多体系の基底状態は, BCS 領域から BEC 領域まで相転移を伴わず連続的につながっているため, この基底状態の連続的な変化を BCS-BEC クロスオーバーと呼ぶ.

#### 4.8 無次元状態方程式の漸近曲線

式 (34),(35),(36) の求めたい無次元状態方程式の解析解は, 任意の無次元パラメータに対して今

のところ存在しない。しかし無次元パラメータが十分小さい領域においては、小さいパラメータで展開できる。以下に高温領域とBCS領域で無次元状態方程式が従うべき漸近曲線を紹介する。実験で決定する無次元状態方程式は、高温領域やBCS極限で以下の漸近曲線に一致する必要がある。

フェルミ粒子系のフガシティーが1よりも十分小さいとき ( $e^{\frac{\mu}{k_B T}} \ll 1$ )、式(32)の無次元圧力の状態方程式は、ビリアル係数  $b_n$  を用いてフガシティーで展開できる [19]。

$$\begin{aligned} f_P \left( \frac{\mu}{k_B T}, \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) &= 2 \left[ e^{\frac{\mu}{k_B T}} + b_2 \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) e^{2\frac{\mu}{k_B T}} + \dots \right] \\ &= f_P^{\text{ideal}} \left( \frac{\mu}{k_B T} \right) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \Delta b_n \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) e^{n\frac{\mu}{k_B T}} \end{aligned} \quad (46)$$

これをビリアル展開と呼ぶ。右辺の係数2はスピン自由度を意味する。  $f_P^{\text{ideal}} \left( \frac{\mu}{k_B T} \right)$  はスピン1/2の理想フェルミ粒子の無次元状態方程式である。

$$f_P^{\text{ideal}} \left( \frac{\mu}{k_B T} \right) = -2 \text{Polylog}_{\frac{5}{2}} \left( -e^{\frac{\mu}{k_B T}} \right) \quad (47)$$

ここで  $\text{Polylog}_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$  は多重対数関数である。ビリアル係数の差は  $\Delta b_n \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) = b_n \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) - b_n^{\text{ideal}}$  であり、理想フェルミ粒子系のビリアル係数は  $b_n^{\text{ideal}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{5/2}}$  である。

2次のビリアル係数の差は解析的に解かれており次式で与えられる [26]。

$$\begin{aligned} \Delta b_2 \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right)^2 \right] \text{erfc} \left[ \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

ここで  $\text{erfc}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} dt e^{-t^2}$  である。3次のビリアル係数の差  $\Delta b_3$  は解析的には解かれていないが、数値的に解かれている [19]。4次以降のビリアル係数の差  $\Delta b_4$  は確定していない。特にユニタリー極限 ( $a^{-1} = 0$ ) では、 $\Delta b_2 = 1/\sqrt{2}$ 、 $\Delta b_3 = -0.3551$  という温度に依存しない普遍的な値を持つ [19]。

相互作用パラメータが十分弱いBCS極限での

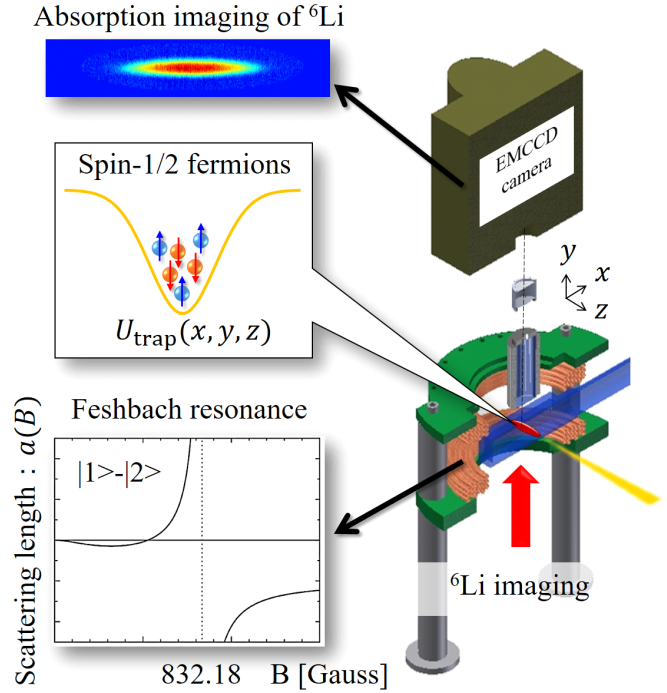


図9: 実験装置。

基底状態 ( $T = 0$ ) の内部エネルギー密度の無次元状態方程式は  $(k_F a)$  で展開でき、2次の項まで解析的に解っている [27]。

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{E}} \left( \frac{1}{k_F(n)a} \right) &= 1 + \frac{10}{9\pi} \left( \frac{1}{k_F(n)a} \right)^{-1} \\ &\quad + \frac{4(11 - 2\log 2)}{21\pi^2} \left( \frac{1}{k_F(n)a} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (49)$$

$T = 0$  ではヘルムホルツの自由エネルギーと内部エネルギーは同値である ( $f_{\mathcal{F}}(\frac{1}{k_F a}) = f_{\mathcal{E}}(\frac{1}{k_F a})$ )。

## 5. 基本的な実験手法

### 5.1 相互作用している極低温フェルミ粒子の実現

図9を用いて実験手順を簡単に解説する [13]。真空ガラスセル中でレーザー冷却によって冷やされた  $^6\text{Li}$  原子気体は、 $z$  方向に照射されたレーザー光による光双極子トラップ (ODT) により捕獲される。ODTのレーザー光は30秒程度の実験時間内に原子がこのレーザー光を吸収しないよう、 $^6\text{Li}$  原子の共鳴波長が671 nmに対し大きく赤方離調を取った1070 nmのレーザー光を用いている。赤方離調の場合、原子はODTのレーザー強度に比例して引力ポテンシャルを感じるため [12]、ODTのレーザー光は原子の位置でお

よそ  $40 \mu\text{m}$  の  $1/e^2$  半径で集光しトラップポテンシャルを生成している。ODT のレーザー強度は、捕獲開始時には原子の温度が  $1 \text{ mK}$  程度と高いため  $100 \text{ W}$  照射し約  $3 \text{ mK}$  の深さの ODT を生成する。ガラスセル中の真空度は、残留ガスがトラップ中の原子に衝突し原子をトラップからはじき出す頻度を下げするため、 $2 \times 10^{-9} \text{ Pa}$  の超高真空状態を保っている。結果として、測定した ODT のトラップの寿命は  $90$  秒程度であり十分に長い。

ODT にトラップされたフェルミ原子は蒸発冷却によってさらに冷却される。蒸発冷却の過程では熱い原子が取り除かれた後の弾性散乱による熱の再分配が重要である。十分冷えると散乱過程は  $s$  波散乱のみになるため、蒸発冷却の開始時に内部状態を図 3 の  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  の混合状態に準備する。さらにフェッシュバッハ共鳴で散乱長の絶対値を大きくし蒸発冷却の効率を向上させる。そのため上下に配置されたヘルムホルツコイルから一様磁場を発生し、フェッシュバッハ共鳴により異なる擬スピン間の散乱長の絶対値を増大させる。目的により蒸発冷却に用いる散乱長は異なるが、散乱長が発散しているユニタリー極限 ( $832.18 \text{ G}$ ) 付近の散乱長の絶対値が大きい領域で蒸発冷却を行う。

蒸発冷却は  $30 \text{ s}$  程度で ODT のレーザー強度を減らしていき、ODT のトラップの深さを徐々に浅くすることにより、熱的な原子を選択的にトラップから逃がし残された原子の温度を下げることができる。よって温度は蒸発冷却の最終 ODT レーザー強度で制御できる。最も冷やす場合、ODT レーザーの強度は  $50 \text{ mW}$  でトラップの深さは  $1 \mu\text{K}$  であり、フェルミ粒子の温度は  $100 \text{ nK}$  程度となる。蒸発冷却後に磁場を断熱的に変化させ調べたい散乱長へと変化させることにより、擬スピン間の相互作用も自在に制御できる。このように我々は温度と散乱長の二つの調整ノブを用いて、様々な相互作用している極低温フェルミ粒子系をトラップ中に実現することができる。

## 5.2 観測手法

トラップ中の極低温  ${}^6\text{Li}$  原子はトラップから解放することなくその場で観測される。観測手法は吸収イメージ法を用いている。吸収イメージ法は共鳴のプロブレーザー光を原子に照射し、その透過分布を CCD カメラで撮影し原子の密度分布をプロブ方向に射影した像:  $\bar{n}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y, z) dy$  を得る手法である。我々の装置はガラスセル中に  $\text{NA} = 0.28$  の対物レンズを備えており、 $2 \mu\text{m}$  の空間分解能で撮影できるように設計されている。また吸収イメージ法は Beer-Lambert の法則を用いているが、 ${}^6\text{Li}$  原子のような軽い原子はプロブ光の吸収・放出時の光子反跳の影響を大きく受ける。そのため我々は最適なプロブ条件を研究し高精度な撮影を行っている [16]。典型的な吸収イメージ像を図 9 の左上に示した。

## 5.3 局所熱力学量の決定

ODT によるトラップポテンシャルは集光したレーザー光の強度分布の形をしており、トラップ中のフェルミ粒子は非一様に分布している。トラップ全体でフェルミ粒子の温度  $T$  と散乱長  $a$  は一定ではあるが、粒子数密度  $n$  やその他の熱力学量はトラップ中の位置に依存して異なる。局所的なフェルミエネルギー  $\varepsilon_F(n)$  も位置に依存することになり、温度パラメータ  $T/T_F(n)$  や相互作用パラメータ  $1/k_F(n)a$  も位置に依存する。さらには、吸収イメージでは 3 次元分布をプロブ方向に射影した 2 次元イメージを得るため、各位置での局所的な熱力学量を測定するのは難しいように思われる。

だがトラップポテンシャルが軸対象ならば、3 次元局所密度  $n(r, z)$  は 2 次元射影像  $\bar{n}(x, z)$  の逆アーベル変換によって得られる。

$$n(r, z) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x'^2 - r^2}} \frac{\partial \bar{n}(x', z)}{\partial x'} dx' \quad (50)$$

ここで  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  である。

局所圧力も局所密度近似 (LDA) の範囲内ならば決定できる。LDA は局所的な熱力学量は局所的な密度で与えられ密度勾配には依存しないと

いう近似である。LDA では局所的な化学ポテンシャルは、

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - U(\mathbf{r})_{\text{trap}} \quad (51)$$

で与えられる。ここで  $\mathbf{r} = 0$  はトラップの極小点とし、 $U(0)_{\text{trap}} = 0$ 、 $\mu_0 = \mu(0)$  とする。式 (28) から、トラップ中の温度と散乱長が一定という条件の下では以下の関係式が成り立つ。

$$dP = nd\mu \quad (52)$$

つまりある局所密度  $n$  での圧力は、密度がゼロ極限からその密度まで  $\mu$  を関数に積分を取ったものである。

$$P(T, \mu, a^{-1}) = \int_{-\infty}^{\mu} n(T, \mu', a^{-1}) d\mu' \quad (53)$$

LDA より  $d\mu = -dU_{\text{trap}}$  であり、逆アーベル変換より得られた  $n(r, z)$  を用いることにより、式 (53) は以下の式より計算できる。

$$P(r, z) = \int_r^{\infty} n(r', z) \frac{\partial U_{\text{trap}}(r', z)}{\partial r'} dr' \quad (54)$$

尚、積分方向は  $z$  方向でも構わない。

逆アーベル変換を計算したくない場合、式 (50) を式 (54) に代入して式変換することにより、 $\bar{n}(x, z)$  と  $\partial U_{\text{trap}}(x, z)/\partial x$  から直接  $P(r, z)$  を計算する手法もある [16]。

以上の方法で局所圧力  $P(r, z)$  と局所密度  $n(r, z)$  は測定イメージ  $\bar{n}(x, z)$  とトラップポテンシャルの形状  $U_{\text{trap}}(r, z)$  より決定可能であることがわかる。我々は後者の方法を用いて局所圧力を計算している。図 10 に典型的な局所圧力と局所密度の実験データを示した。図 10(a) が吸収イメージングによって得られた  $\bar{n}(x, z)$ 、図 10(b) が決定された局所圧力  $P(r, z)$ 、図 10(c) が実験で用いているトラップポテンシャル  $U_{\text{trap}}(r, z)$  である。  $P(r, z)$  と  $U_{\text{trap}}(r, z)$  を同じ位置で対応付けし、 $P(U_{\text{trap}})$  としたのが図 10(d) である。我々は局所密度を式 (52) の関係式と LDA を用いて以下の式より計算している。

$$n(U_{\text{trap}}) = -\frac{dP(U_{\text{trap}})}{dU_{\text{trap}}} \quad (55)$$

得られる局所密度の例を図 10(e) に示した。

次に温度  $T$  と化学ポテンシャル  $\mu_0$  の基本的な決定方法について説明する。s 波相互作用し

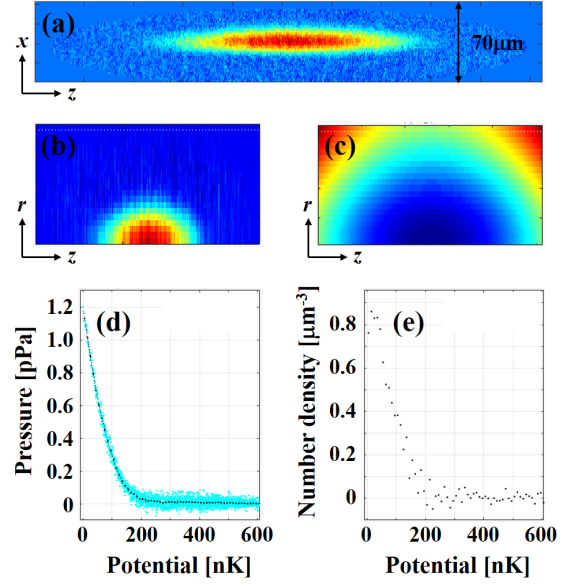


図 10: 局所圧力と局所密度の決定例。(a) 測定イメージ  $\bar{n}(x, z)$ 、(b) 計算された局所圧力  $P(r, z)$ 、(c) トラップポテンシャル  $U_{\text{trap}}(r, z)$ 、(d)  $P(U_{\text{trap}})$ 、(e)  $n(U_{\text{trap}})$ 。水色の点が全データポイント、黒点がビニングにより得られた平均値。

ているフェルミ粒子系の状態方程式は式 (34) に従うことを示した。故に LDA の下では圧力は以下の式に従うことになる。

$$P(U_{\text{trap}}) = \frac{k_B T}{\Lambda_T^3(T)} f_P \left( \frac{\mu_0 - U_{\text{trap}}}{k_B T}, \frac{\Lambda_T(T)}{a} \right) \quad (56)$$

局所密度が小さくなる領域ではフェルミ温度が小さくなり、その結果温度パラメータ  $T/T_F(n)$  は大きな値を持ち、 $\exp(\mu/k_B T)$  は 1 より十分小さい値を持つ。故に、式 (46) にフガシティーで展開した状態方程式 (56) を代入し、 $T$  と  $\mu_0$  を変数として実験で得られた  $P(U_{\text{trap}})$  の低密度領域をフィットする事によりそれらを決定できる。ただしフェルミ粒子の温度が下がるにつれ、ベリアル展開でフィットできる領域が狭くなり精度良く決定できない。よって低温領域の  $T$  と  $\mu$  の決定は、(46) の状態方程式を低温側に成長させながら決定していく手段を用いる。詳細は参考文献 [28] に説明されている。

以上より  $P, n, T, \mu, a$  の組み合わせが一枚の吸収イメージから多く得られる。トラップ中の

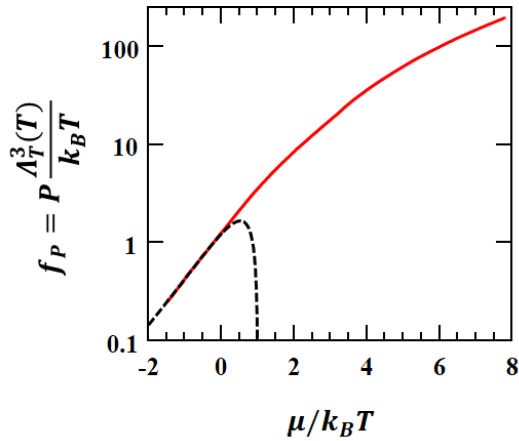


図 11: ユニタリー極限での無次元圧力の状態方程式. 実線が実験結果, 黒点線は3次までのビリアル展開の状態方程式.

フェルミ粒子が密度分布を持っていることが不利ではなく有利に働いていることがわかる. この作業を様々な温度, 散乱長で繰り返すことによって熱力学ポテンシャル  $P(T, \mu, a^{-1})$  が得られ, 熱力学関係式を用いて式 (34), (35), (36) の普遍的状态方程式に辿り着くことができる.

## 6. これまでの研究成果の紹介

ここでは簡単にこれまでの冷却原子実験による研究成果を示し, 決定したかった無次元状態方程式を示す. それぞれの成果の詳細は参考文献を参照して頂きたい.

### 6.1 ユニタリー極限での無次元状態方程式 [5, 6]

式 (34) で定義された無次元圧力の状態方程式をユニタリー極限で決定した. 図 11 の赤の実線が実験データであり, 黒の点線が式 (46) の3次までのビリアル展開の曲線である. 超流動転移点は別実験で決定しており,  $(\mu/k_B T)_c = 2.5(1)$  であった. その時  $(T/T_F)_c = 0.17(1)$  であった. その他の無次元状態方程式は 4.4 節の熱力学関係式を用いれば導出できる. ([5, 6] の論文と同じ実験データを用いているが, 出版の後に温度評価方法が改善され高温領域の値が改善された.)

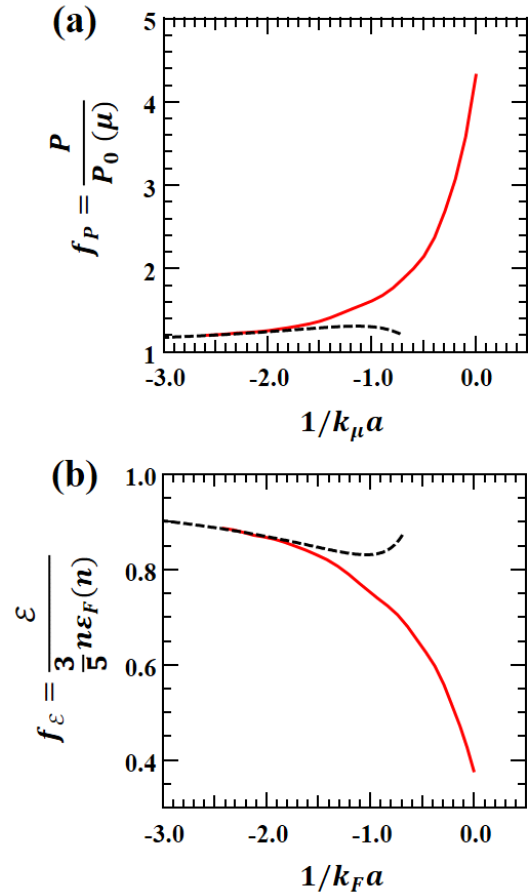


図 12: 基底状態における無次元状態方程式. (a) 無次元圧力, (b) 無次元内部エネルギー密度. 赤実線が実験結果, 黒点線は BCS 極限での漸近曲線.

### 6.2 BCS からユニタリー極限に渡る基底状態における無次元状態方程式 [7, 8]

式 (35) で定義されたゼロ温度極限の無次元圧力の状態方程式を BCS 領域からユニタリー極限で決定した. 図 12(a) の赤の実線が実験データであり, 黒の点線が式 (49) から導出した BCS 領域での漸近曲線である. また熱力学関係式を用い, 式 (36) で定義された無次元内部エネルギー密度の状態方程式を導出した. 図 12(b) の赤の実線が実験データであり, 黒の点線が式 (49) の漸近曲線である.  $T = 0$  の極限なので自由エネルギー密度の状態方程式と同値である. ユニタリー極限での Bertsch パラメータは  $\xi = 0.375(10)$  であった. コンタクト密度は図 12(b) の曲線の勾配から決定できる.

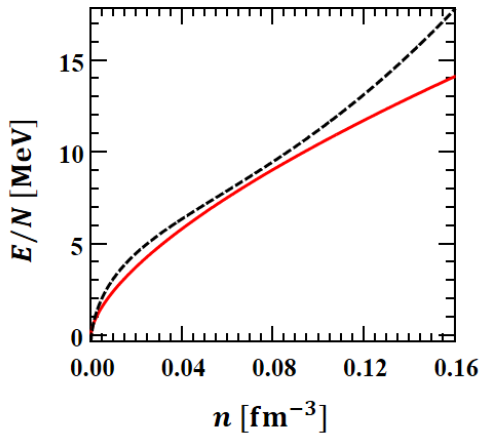


図 13: 希薄中性子物質の状態方程式. 赤実線は冷却原子実験から決定された状態方程式, 黒点線は原子核理論 (APR) [29].

### 6.3 中性子物質の基本状態方程式の決定 [9]

中性子は散乱長  $a_{NN} = -18.5$  fm を持つスピン 1/2 のフェルミ粒子である. 散乱長を変化させることはできないが, 粒子数密度によって相互作用パラメータ  $1/k_F(n)a_{NN}$  が変化する. 散乱長の符号が負なので, 低密度だと BCS 領域に属し高密度になるにつれユニタリ極限に近づいていく. また原子核や中性子星中の中性子の温度は, フェルミ温度と比較すると十分小さいのでゼロ温度極限と考えることができる. よって, 希薄中性子物質の無次元内部エネルギー密度の状態方程式は式 (36) に従うと期待できる. 式 (36) より中性子 1 つあたりの内部エネルギーは次式で与えられる.

$$E/N = \frac{3}{5}\varepsilon_F(n)f_\varepsilon \left( \frac{1}{k_F(n)a_{NN}} \right) \quad (57)$$

図 12(b) で示した  $f_\varepsilon$  の曲線と中性子の質量と散乱長を用いて, 我々は希薄中性子物質の状態方程式を計算した.

図 13 に冷却原子実験と普遍的物理の原理に基づいて与えられた希薄中性子物質の基本的状態方程式を示した. 赤線が冷却原子実験から得られた中性子物質の状態方程式である. 比較のため APR という原子核理論モデルの 1 つを点線で示したが [29], 低密度領域で良く一致していることが確認された. 「基本的」とは, この状態

方程式には中性子の有効長, p 波散乱以上の高次の相互作用, 3 体力, 特殊相対論的效果は含まれていないが, この曲線は一般的な中性子物質の根本的な物性を示している事を意味する. 今後中性子の有効長  $r_e$  の影響や p 波相互作用しているフェルミ粒子系を冷却原子で調べることに より, 中性子物質の物性がより明らかにされると期待される.

## 7. 結び

粒子間の相互作用の効果が散乱波の位相シフトに現れ, 位相シフトを有限個のパラメータで説明できるだけで, これほど多彩な普遍的物理法則が表れるのは非常に面白い. また散乱ポテンシャルに接触する波動関数の振る舞いがコンタクトという物理量を与え, 熱力学, 状態方程式, 近距離粒子相関, 運動量分布に普遍的な物性を与えるのも面白い. 今回は s 波散乱長のみを位相シフトを与えるパラメータとして扱ったが, 有効長の影響や p 波散乱等の高次の散乱過程においても, 散乱波の対称性を考慮する必要が出てくるが, 同様な普遍的物理法則が存在する. 冷却原子系は, 散乱長, 有効長, 散乱次数がフェッシュバハ共鳴で制御できる粒子系であるため, この様な普遍的物理法則を実験的に確認し, 量子的な散乱が重要な粒子系へ知見を与えることができる. 特に無次元化した状態方程式を用意する事により, 速やかに他の粒子系へ応用が可能である.

本解説では触れなかったが, 状態方程式は量子多体系の状態の理解を進めるためにも非常に重要である. 例えば  $T=0$  で化学ポテンシャルで決まる粒子数密度  $n(\mu)$  を考える. 相互作用がなければ粒子数密度は理想フェルミ気体の状態方程式に従う. 粒子間に引力相互作用が働きフェルミ面にクーパー対が形成できると, さらに多くの粒子数を保持することができる. さらにオーダーパラメータ周りの揺らぎ成分も含めれば, 実際はもっと多くの粒子数を保持しているはずである. この様に状態方程式は量子系の

状態そのものを反映する。熱力学量は関係式によって全ての熱力学量に繋がっているため、量子系を理解する上で熱力学量測定は大変重要であることが理解できる。

式(14)のハミルトニアンはシンプルであるが、厳密解を得るのは容易ではない。そこで平均場近似などのモデル計算が正攻法の1つである。モデル計算はハミルトニアンの主要項から順次取り入れていく手法であるため、ボトムアップ的にどのような効果を計算に考慮するとどういった値が出るのか調べるができる。実験で決定された状態方程式を説明できた理論モデルが正しく物理を記述できており、我々はその理論モデルから物理を理解することができる。図12に示した我々の実験結果は、慶應大学の田島氏らによって確立された拡張T行列近似(ETMA)という理論モデルによってよく説明できている[8]。ETMAはオーダーパラメータ(フェルミ超流動)周りの位相と振幅の揺らぎを取り入れた理論モデルであり、実験結果との比較により基底状態における超流動揺らぎの重要性が明らかになった。

これまでユニタリー極限における状態方程式の決定と、ゼロ温度極限でのBCSからユニタリー極限に及ぶ状態方程式を決定してきた。しかしこれまでの研究は様々な量子多体系の理解に向けての一步を踏み出したに過ぎない。s波相互作用している1/2フェルミ粒子系でさえ、図8の相図は実験的に明らかにされていない。クォーク系等の多成分フェルミ粒子系に迫るためにも、図3の $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ の3成分を用いた量子系の研究も進めるべきである。また少数系と多体系を連続的につなげる学理の構築も重要な課題である。現状では2成分フェルミ粒子系のベリアル係数は3次までしか確定されておらず、3成分フェルミ粒子系に対しては2次までしか確定していない。冷却原子研究の更なる発展と応用に期待して頂きたい。

## 謝辞

本研究は2005年度～2010年度のERATO「上田マクロ量子制御プロジェクト」、2012年度～2017年度の新学術領域研究「実験と観測で解き明かす中性子星の核物質」の一環として進められた。それぞれの代表の東京大学上田正仁氏、東北大学田村裕和氏を始め、プロジェクトの関係者各位にこれまでのご支援、ご協力に深く感謝申し上げます。また、東京大学の五神真氏、小芦雅斗氏、大阪大学の向山敬氏、慶応大学の大橋洋士氏には貴重な議論を重ねて頂き感謝致しております。理化学研究所の中井陽一氏には本誌でこれまでの研究を発表する機会を与えて頂き感謝致します。

## 参考文献

- [1] W. Zwerger, ‘The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas’, (Springer Berlin Heidelberg) 2011.
- [2] C. Chin *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [3] S. Kasahara *et al.*, *Nat. Commun.* **7**, 12843 (2016).
- [4] A. Gezerlis and J. Carlson, *Phys. Rev. C* **77**, 032801 (2008).
- [5] M. Horikoshi *et al.*, *Science* **327**, 442 (2010).
- [6] 堀越 宗一ら, *日本物理学会誌* **67**, 257 (2012).
- [7] M. Horikoshi *et al.*, *arXiv:1612.04026* (2016).
- [8] H. Tajima *et al.*, *Phys. Rev. A* **95**, 043625 (2017).
- [9] 堀越 宗一, *原子核研究* **61**, 4 (2016).
- [10] H. J. Metcalf and P. Van der Straten, ‘Laser cooling and trapping’, (Springer Science & Business Media) 2012.
- [11] C. J. Foot, ‘Atomic physics Vol. 7’, (Oxford University Press) 2005.

- [12] R. Grimm *et al.*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).
- [13] T. Ikemachi *et al.*, J. Phys. B **50**, 01LT01 (2016).
- [14] H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
- [15] U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [16] M. Horikoshi *et al.*, arXiv:1608.07152 (2016).
- [17] G. Zürn *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 135301 (2013).
- [18] B. DeMarco *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4208 (1999).
- [19] X.-J. Liu, Phys. Rep. **524**, 37 (2013).
- [20] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2952 (2008).  
S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2971 (2008).  
S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2987 (2008).
- [21] E. Braaten *et al.*, Phys. Rev. A **78**, 053606 (2008).
- [22] E. Braaten *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 205301 (2008).
- [23] S. Zhang and A. J. Leggett, Phys. Rev. A **79**, 023601 (2009).
- [24] J. T. Stewart *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 235301 (2010).
- [25] G. F. Bertsch, in the announcement of the Tenth International Conference on Recent Progress in Many-Body Theories, (1999).
- [26] N. Sakumichi *et al.*, Phys. Rev. A **89**, 033622 (2014).
- [27] A. L. Fetter and J. D. Walecka, ‘Quantum theory of many-particle systems.’, (Courier Corporation) 2012.
- [28] S. Nascimbene *et al.*, New J. Phys. **12**, 103026 (2010).
- [29] A. Akmal *et al.*, Phys. Rev. C **58**, 1804 (1998).



---

## 2017 年度 役員・委員会

### 会長

東俊行（理化学研究所）

### 幹事

長嶋泰之（東京理科大学）〔副会長〕      北島昌史（東京工業大学）  
酒井康弘（東邦大学）                      中野祐司（立教大学）  
菱川明栄（名古屋大学）

### 運営委員

足立純一（高エネルギー加速器研究機構）      岡田邦宏（上智大学）  
高橋正彦（東北大学）                              星野正光（上智大学）  
中野祐司（立教大学）                              中村信行（電気通信大学）  
菱川明栄（名古屋大学）                              佐甲徳栄（日本大学）  
平山孝人（立教大学）                              小田切丈（上智大学）  
渡部直樹（北海道大学）                              本橋健次（東洋大学）  
長嶋泰之（東京理科大学）                              北島昌史（東京工業大学）

### 常置委員会

編集委員会                      委員長：北島昌史（東京工業大学）  
行事委員会                      委員長：菱川明栄（名古屋大学）  
広報渉外委員会                      委員長：酒井康弘（東邦大学）  
顕彰委員会                      委員長：長嶋泰之（東京理科大学）  
庶務委員会                      委員長：中野祐司（立教大学）

---

編集委員      五十嵐明則, 岡田邦宏, 北島昌史, 高口博志, 冨田成夫,  
中井陽一, 彦坂泰正, 間嶋拓也, 山崎優一



しょうとつ 第14巻 第5号 (通巻78号)

Journal of Atomic Collision Research

©原子衝突学会 2017

<http://www.atomiccollision.jp/>

発行: 2017年9月15日

配信: 原子衝突学会事務局 <[acr-post@bunken.co.jp](mailto:acr-post@bunken.co.jp)>